МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ РЕСПУБЛИКАНСКИЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК
1969 Геодезия, картография и аэрофотосъемка Выпуск 8

ГЕОДЕЗИЯ

УДК 528.24

А. Т. ДУЛЬЦЕВ

МЕТОД СОВМЕСТНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕДУКЦИОННЫХ ПОСТОЯННЫХ ТЕОРИИ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ

В работе рассмотрена задача определения по астрономическим, геодезическим и гравиметрическим данным четырех редукционных постоянных $\bar{z}$, $\bar{y}$, $\bar{x}$ и h_0, введенных Н. К. Мигалем [7—9]. С точностью малых величин второго порядка (за величину первого порядка малости принято α — сжатие Земли) первые три постоянные $\bar{z}$, $\bar{y}$ и $\bar{x}$ совпадают с координатами центра масс Земли в прямоугольной пространственной системе координат, рассматриваемой в высшей геодезии. Четвертая постоянная h_0 является поправкой, уточняющей длину большой полуоси референц-эллипсоида, и связана следующей формулой с потенциалом W_0 силы тяжести на поверхности геоида [6]:

$$h_0 = a\left(-1 - \frac{2}{3}\beta - \frac{1}{6}q + \frac{32}{105}\alpha^2 - \frac{16}{21}q\alpha + \frac{88}{105}\beta_1\right) + \\ + \frac{W_0}{g_e} - \frac{a}{4\pi g_e}\int \Delta g d\sigma, \tag{1}$$

где $q = \frac{\omega^2 a}{g_e}$; ω — угловая скорость вращения планеты;

$$\Delta g = g - g_e\,(1 + \beta \sin^2\varphi - \beta_1 \sin^2 2\varphi). \tag{2}$$

Второе слагаемое формулы (2) в теории Н. К. Мигаля, как известно, представляет любую полученную эмпирическим путем приближенную формулу распределения силы тяжести на поверхности планеты. Единственное требование к этой эмпирической формуле заключается в том, чтобы разность Δg между измеренной силой тяжести g и вычисленной по данной формуле была бы не более малой величины второго порядка, а параметры β и β_1 были бы соответственно малыми величинами первого и второго порядков.

Редукционные постоянные совместно с гравиметрической картой дают возможность полностью определить поверхность Земли и ее внешнее гравитационное поле [1]. Определение масштабной постоянной h_0 дает возможность вычислить по формуле (1) уровенный потенциал W_0. Редукционные постоянные фигурируют в формулах для вычисления расстояний между геоидом и референц-эллипсоидом, а также в формулах для составляющих уклонения отвеса. Зная редукционные постоянные и используя упомянутые формулы, по астрономическим координатам, измеренным в любом пункте земной поверхности, можно вычислить геодезические координаты этого пункта, что важно для нахождения геодезических координат точек, удаленных от основной триангуляции. Определение редукционных постоянных ведет к установлению связи между отдельными референц-эллипсоидами и к установлению единой для всей планеты системы геодезических координат.

Вычисление редукционных постоянных необходимо не только для геодезии, но и для других наук — геофизики, астрономии, небесной механики.

Определение гравитационного поля Земли помогло бы решить ряд трудных проблем, связанных, например, с изучением формы уровенных поверхностей потенциала силы тяжести, распределения масс и напряжений внутри Земли, возмущений в движении ближайших к ней небесных тел [4] и др. В настоящее время знание редукционных постоянных необходимо для расчетов, связанных с запуском и использованием в различных научных и практических целях искусственных спутников. Экваториальный радиус Земли лежит в основе астрономической единицы расстояний в Солнечной системе и входит в определение параллаксов Луны и Солнца.

Вычисление редукционных постоянных может быть осуществлено двумя основными путями. Первый путь заключается в определении соответствующих коэффициентов разложения потенциала притяжения или других основных характеристик внешнего гравитационного поля Земли по сферическим функциям. Координаты $\bar{z}$, $\bar{y}$ и $\bar{x}$ центра масс планеты характеризуются коэффициентами при сферической функции первого порядка. Сферические коэффициенты могут быть получены по наблюдениям за возмущениями орбит искусственных спутников Земли (спутниковый метод) или по данным достаточно подробной общеземной гравиметрической съемки (гравиметрический метод).

Практически неосуществимо нахождение координат центра масс Земли чисто геометрическим методом по наблюдениям искусственных спутников, так как для этого необходимы спутниковые наблюдения в очень большом количестве пунктов, равномерно размещенных на земной поверхности [5]. Спутниковые определения сферических коэффициентов первого порядка, выполненные до сих пор, недостаточно строги и требуют независимого контроля. Определение редукционных постоянных только по гравиметрическим данным возможно после завершения подробной общеземной гравиметрической съемки, однако точность такого определения может оказаться неудовлетворительной [10].

Второй возможный путь вычисления редукционных постоянных — использование специальных градусных уравнений, основанных на результатах астрономических, геодезических и гравиметрических измерений. Такие уравнения были предложены впервые в 1949 г. Н. К. Мигалем [7]. В 1960 г. М. С. Молоденский [10] предложил уравнения, в которых используются высоты квазигеоида и составляющие уклонений отвеса относительно референц-эллипсоида, определенные из астрономо-гравиметрического нивелирования. Хотя второй путь в настоящее время представляется более надежным [10, 12], многие авторы приходят к мнению о необходимости дальнейшей разработки и совершенствования всех методов, а также оптимальных путей их совместного использования [11, 13, 14].

В работах [2, 3] были предложены градусные уравнения для определения основной редукционной постоянной h_0. Координаты центра масс Земли могут быть получены после определения h_0 из решения трех уравнений, которые дают записанные для начального пункта астрономо-геодезической сети формулы Н. К. Мигаля для вычисления высот геоида и составляющих u и v уклонений отвеса соответственно в плоскостях меридиана и первого вертикала. Такой прием, как не трудно показать, не окажет влияния на величину h_0. Однако он может повлиять на значения постоянных $\bar{z}$, $\bar{y}$, $\bar{x}$, характеризующих ориентировку референц-эллипсоида, так как они будут определены только по одному пункту, хотя и основному. Описанным в [2, 3] методом могут быть получены градусные уравнения, содержащие все четыре редукционные постоянные, если эти постоянные оставить в принятых за основу формулах и сохранить во всех промежуточных выкладках. Не останавливаясь на подробностях вывода, приведем основные формулы и градусные уравнения для случая совместного определения редукционных постоянных.

В основу предложенного в [2, 3] метода положены уже упоминавшиеся формулы Н. К. Мигаля для высот геоида и составляющих уклонений отвеса относительно референц-эллипсоида. С помощью этих формул геодезические измерения проектируются с поверхности геоида на референц-эллипсоид. Редуцированные элементы триангуляционного ряда определяются следующими выражениями: проекция базисной стороны

$$s = p - \frac{p}{R}\left[\bar{z}\sin\varphi_e + \bar{y}\cos\varphi_e\cos\lambda_e + \bar{x}\cos\varphi_e\sin\lambda_e + h_0 + N_e + K(\varphi_e)\right]; \qquad (3)$$

проекция направления

$$\bar{r}_{ik} = r_{ik} + \bar{z}E_{ik} + \bar{y}F_{ik} + \bar{x}G_{ik} + h_0 D_{ik} + L_{ik}; \qquad (4)$$

проекция любой стороны ряда

$$s_{ik} = p_{ik} + \bar{z}t_{ik} + \bar{y}g_{ik} + \bar{x}f_{ik} + h_0 w_{ik} + l_{ik}. \qquad (5)$$

В формулах (3)—(5) p и r_{ik} — измеренные значения соответственно базисной стороны и направлений; индекс i обозначает определяемый триангуляционный пункт; индекс k — наблюдаемый; индекс e показывает, что берутся средние для базисной стороны значения данных величин; R — радиус кривизны нормального сечения поверхности эллипсоида в направлении базисной стороны; φ и λ — астрономические координаты; N — гравиметрическая часть высоты геоида, вычисляемая по формуле Стокса; член $K(\varphi)$ связан с принятыми постоянными эллипсоида и зависит от широты точки, в которой вычисляется; p_{ik} — сторона ряда между пунктами i и k, вычисленная с помощью теоремы синусов последовательно по ходовой линии по измеренным значениям базисной стороны и направлений;

$$\begin{aligned}
E_{ik} &= D_{ik}\sin\varphi_k;\\
F_{ik} &= D_{ik}\cos\varphi_k\cos\lambda_k;\\
G_{ik} &= D_{ik}\cos\varphi_k\sin\lambda_k; \qquad (6)\\
L_{ik} &= D_{ik}[N_k + K(\varphi_k)];\\
D_{ik} &= \frac{\rho''}{M_k}\,\frac{e^2}{2}\sin 2A_{ik}\cos^2 B_k,
\end{aligned}$$

где M_k — радиус кривизны меридиана в точке k; e — первый эксцентриситет меридианного эллипса;

$$t_{ik} = p_{ik}\left[\frac{1}{\rho}\sum_{1}^{n}(\Delta E_{\mathrm{I}}\,\mathrm{ctg}\,\mathrm{I} - \Delta E_{\mathrm{II}}\,\mathrm{ctg}\,\mathrm{II})_n - \frac{1}{R}\sin\varphi_e\right];$$

$$g_{ik}=p_{ik}\left[\frac{1}{\rho}\sum_{1}^{n}(\Delta F_{\rm I}\operatorname{ctg}{\rm I}-\Delta F_{\rm II}\operatorname{ctg}{\rm II})_n-\frac{1}{R}\cos\varphi_e\cos\lambda_e\right];$$

$$f_{ik}=p_{ik}\left[\frac{1}{\rho}\sum_{1}^{n}(\Delta G_{\rm I}\operatorname{ctg}{\rm I}-\Delta G_{\rm II}\operatorname{ctg}{\rm II})_n-\frac{1}{R}\cos\varphi_e\sin\lambda_e\right]; \qquad (7)$$

$$w_{ik}=p_{ik}\left[\frac{1}{\rho}\sum_{1}^{n}(\Delta D_{\rm I}\operatorname{ctg}{\rm I}-\Delta D_{\rm II}\operatorname{ctg}{\rm II})_n-\frac{1}{R}\right];$$

$$l_{ik}=p_{ik}\left[\frac{1}{\rho}\sum_{1}^{n}(\Delta L_{\rm I}\operatorname{ctg}{\rm I}-\Delta L_{\rm II}\operatorname{ctg}{\rm II})_n-\frac{N_e+K(\varphi_e)}{R}\right],$$

где n — номер треугольника, а через I и II обозначены углы в треугольнике, лежащие соответственно против определяемой и исходной сторон.

После нахождения редуцированных элементов осуществляется передача координат по отдельному звену астрономо-геодезической сети. Геодезические координаты и азимут в начальном пункте звена получены по известным формулам

$$\begin{aligned} B&=\varphi-u;\\ L&=\lambda-v\sec\varphi;\\ A&=\alpha-v\operatorname{tg}\varphi. \end{aligned} \qquad (8)$$

Далее по астрономическим координатам и азимуту в начальном пункте при использовании измеренных значений базисной стороны p и направлений r_{ik}, а также вычисленных по ним длин сторон n_{ik} получены из решения прямых геодезических задач последовательно по ходовой линии координаты $\bar{\varphi}$, $\bar{\lambda}$ и азимуты $\bar{\alpha}$ во всех пунктах ряда. Тогда для любого пункта и, в частности, для последнего пункта n звена находим

$$\begin{aligned} B_n&=\bar{\varphi}_n+dB_n;\\ L_n&=\bar{\lambda}_n+dL_n;\\ A_{nm}&=\bar{\alpha}_{nm}+dA_{nm}, \end{aligned} \qquad (9)$$

где через m обозначен предыдущий пункт, а dB, dL и dA — поправки, учитывающие редукционные члены формул (3)—(5), (8). Применив дифференциальные формулы первого рода, для этих поправок запишем выражения

$$\begin{aligned} dB_n&=\bar{z}\,\Gamma_n^B+\bar{y}J_n^B+\bar{x}\Pi_n^B+h_0Q_n^B+T_n^B;\\ dL_n&=\bar{z}\,\Gamma_n^L+\bar{y}J_n^L+\bar{x}\Pi_n^L+h_0Q_n^L+T_n^L;\\ dA_{nm}&=\bar{z}\,\Gamma_{nm}^A+\bar{y}J_{nm}^A+\bar{x}\Pi_{nm}^A+h_0Q_{nm}^A+T_{nm}^A; \end{aligned} \qquad (10)$$

причем

$$Q_n^B=p_1^{mn}Q_m^B+p_3^{mn}w_{mn}+p_4^{mn}Q_{mn}^A;$$

$$Q_n^L=q_1^{mn}Q_m^q+q_3^{mn}w_{mn}+q_4^{mn}Q_{mn}^A+Q_m^L;$$

$$Q^{A}_{nm} = r^{mn}_{1} Q^{B}_{m} + r^{mn}_{3} w_{mn} + r^{mn}_{4} Q^{A}_{mn};$$

и (11)

$$Q^{A}_{mn} = Q^{A}_{m.\,m-1} \pm \Delta D_{m}.$$

Через $\mathbf{p}^{mn}$, q^{mn} и r^{mn} в (11) обозначены известные коэффициенты дифференциальных формул первого рода. Чтобы получить выражения для величин Г, J, П и T, фигурирующих в (10), надо подставить их вместо Q в (11), заменив при этом w соответственно на t, g, f и l, а D соответственно на E, F, G, L с теми же индексами.

Для составления уравнений, определяющих редукционные постоянные, использована идея Н. К. Мигаля. Геодезические координаты в конечном пункте n звена можно вычислить по формулам (9) и (10), а также по измеренным в нем астрономическим координатам с помощью формул (8). Получение одних и тех же величин двумя различными путями и дает возможность составить градусные уравнения

$$\begin{gathered}
\bar{z}\left(\Gamma^{B}_{n} + \frac{1}{a}\cos\varphi_{n}\right) + \bar{y}\left(J^{B}_{n} - \frac{1}{a}\sin\varphi_{n}\cos\lambda_{n}\right) + \\
+ \bar{x}\left(\Pi^{B}_{n} - \frac{1}{a}\sin\varphi_{n}\sin\lambda_{n}\right) + h_{0}Q^{B}_{n} - S^{B} = 0; \\
\bar{z}\Gamma^{L}_{n} + \bar{y}\left(J^{L}_{n} - \frac{1}{a}\sin\lambda_{n}\,\mathrm{sc}\,\varphi_{n}\right) + \\
+ \bar{x}\left(\Pi^{L}_{n} + \frac{1}{a}\cos\lambda_{n}\,\mathrm{sc}\,\varphi_{n}\right) + h_{0}Q^{L}_{n} - S^{L} = 0; \qquad (12) \\
\bar{z}\Gamma^{A}_{nm} + \bar{v}\left(J^{A}_{nm} - \frac{1}{a}\sin\lambda_{n}\,\mathrm{tg}\,\varphi_{n}\right) + \\
+ \bar{x}\left(\Pi^{A}_{nm} + \frac{1}{a}\cos\lambda_{n}\,\mathrm{tg}\,\varphi_{n}\right) + h_{0}Q^{A}_{nm} - S^{A} = 0,
\end{gathered}$$

в которых

$$\begin{gathered}
S^{B} = \varphi_{n} - \xi_{n} - m_{1}\sin 2\varphi_{n} - m_{2}\sin 4\varphi_{n} - \bar{\varphi}_{n} - T^{B}_{n}; \\
S^{L} = \lambda_{n} - \eta_{n}\,\mathrm{sc}\,\varphi_{n} - \bar{\lambda}_{n} - T^{L}_{n}; \qquad (13) \\
S^{A} = \alpha_{nm} - \eta_{n}\,\mathrm{tg}\,\varphi_{n} - \bar{\alpha}_{nm} - T^{A}_{nm}.
\end{gathered}$$

В (13) ξ_{n} и η_{n} — гравиметрические части составляющих u и v уклонений отвеса, вычисляемые по формулам Венинг—Мейнеса; m_{1} и m_{2} — известные параметры референц-эллипсоида.

Первое уравнение из (12) может составляться только для широтных, а второе — только для долготных звеньев. Третье уравнение является зависимым от второго.

Таким образом, составив уравнения (12) для всех звеньев астрономо-геодезической сети, получим систему уравнений, определяющую редукционные постоянные. При этом сюда должны быть добавлены еще три уравнения, которые дают указанные выше формулы Н. К. Мигаля, записанные для начального пункта сети.

Формулы (3)—(5), (10), возможно, позволят нам в дальнейшем объединить рассмотренную задачу с общим уравниванием астрономо-геодезической сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бровар В. В., Магницкий В. А., Шимберев Б. П. Теория фигуры Земли. Геодезиздат, М., 1961.

2. Дульцев А. Т. Определение редукционной постоянной h_0. Геодезия, картография и аэрофотосъемка, вып. 2. Межведомственный республиканский научно-технический сборник. Изд-во Львовского ун-та, Львов, 1965.

3. Дульцев А. Т. К определению редукционной постоянной h_0. Циркуляр Львовской астрономической обсерватории. № 42. Изд-во Львовского ун-та, 1967.

4. Изотов А. А. Современное состояние и задачи геодезии. Труды III съезда ВАГО, 1960, АН СССР, М., 1962.

5. Изотов А. А. К теории определения фигуры и размеров Земли по наблюдениям искусственных спутников. Известия вузов СССР. Геодезия и аэрофотосъемка, № 3, 1965.

6. Марыч М. И. Новый вывод формулы Н. К. Мигаля, определяющей фигуру Земли. Известия вузов СССР. Геодезия и аэрофотосъемка, № 4, 1961.

7. Мигаль Н. К. Теория совместного определения фигуры и размеров Земли. Научные записки Львовского политехнического ин-та, серия геодезическая, № 1, 1949.

8. Мигаль Н. К. К вопросу определения фигуры Земли без использования нормального гравитационного поля. Научные записки Львовского политехнического ин-та, серия геодезическая, № 5, 1959.

9. Мигаль Н. К. Относительно точности определения редукционных постоянных, высот геоида и отклонений отвеса. Научные записки Львовского политехнического ин-та, серия геодезическая, № 9, 1962.

10. Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. Труды ЦНИИГАиК, вып. 131, 1960.

11. Пеллинен Л. П. Определение коэффициентов разложения гравитационного потенциала Земли по шаровым функциям из совместной обработки гравиметрических и спутниковых данных. Известия вузов СССР. Геодезия и аэрофотосъемка, № 5, 1965.

12. Fischer I. Comments on comparison and combination of satellite with other results. «Use Artific. Satellites Geod». Amsterdam N. Holland Publ. Co., 1963.

13. Kaula W. M. A geoid and vorld geodetic system based on a combination of gravimetric, astrogeodetic and satellite data. Journ. of Geoph. Research, v. 66, N. 6, 1961.

14. Zhongolovitch I. D., Pellinen L. P. Certains aspects de la solution du probleme fondamental de la geodesie superieure. «Use Artific Satellites Geod». Amsterdam, N. Holland Publ. Co., 1963.

Работа поступила
16 ноября 1967 г.