УДК 528. 283

В. А. КОВАЛЕНКО

ОДНОВРЕМЕННЫЕ НАБЛЮДЕНИЯ НЕБЕСНОГО СВЕТИЛА И КОНТРОЛЬ УГЛОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Известно, что астрономические азимуты могут служить надежным независимым контролем угловых измерений в триангуляции, полигонометрии и теодолитных ходах. При таком контроле на концах угломерного хода определяются азимуты сторон, разность которых и используется затем в качестве контролирующей величины.

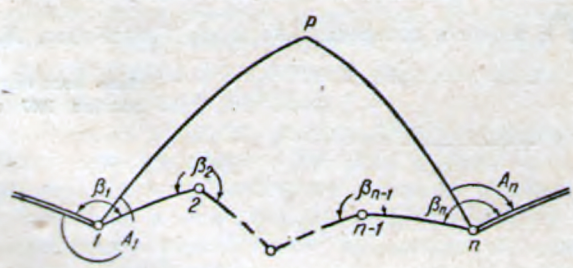

Рис. 1.

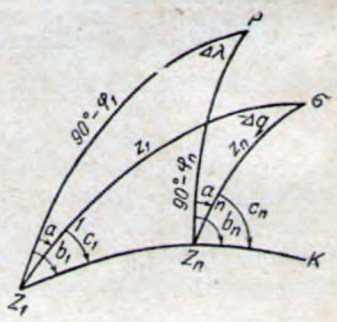

Рис. 2.

Пусть (рис. 1) 1, 2, ..., n — вершины угломерного хода, в конечных точках которого определены геодезические азимуты A_1 и A_n: β_1, β_2 ..., β_n — левые углы хода, редуцированные на поверхность референц-эллипсоида; t — разность прямого и обратного азимутов одной и той же стороны, измененная на 180°; i — число сторон между точками 1 и n.

Условие азимутов для данного случая можно записать так:

$$A_n = A_1 + \Sigma\beta + \Sigma t_i - i \cdot 180°.$$

Отсюда

$$\Sigma\beta = (A_n - A_1) - \Sigma t_i + i \cdot 180°. \qquad (1)$$

Геодезические азимуты A_1 и A_n получаем из уравнений Лапласа:

$$A_1 = \alpha_1 - (\lambda_1 - L_1) \sin \varphi_1;$$

$$A_n = \alpha_n - (\lambda_n - L_n) \sin \varphi_n, \qquad (2)$$

где α — астрономический азимут; λ, φ — астрономические координаты; L — геодезическая долгота.

Разность азимутов t_i вычисляют по известным в сферической геодезии формулам.

С учетом уравнений (2) выражение (1) перепишется так:

$$\Sigma\beta = (\alpha_n - \alpha_1) - \Sigma t_i - (\lambda_n - L_n)\sin\varphi_n + (\lambda_1 - L_1)\sin\varphi_1 + i\cdot 180^\circ$$

Но

$$\alpha = a + Q,$$

где a — азимут светила; Q — горизонтальный угол между направлениями на земной предмет и светило. Тогда

$$\Sigma\beta = (a_n - a_1) + (Q_n - Q_1) - \Sigma t_i - (\lambda_n - L_n)\sin\varphi_n + \\ + (\lambda_1 - L_1)\sin\varphi_1 + i\cdot 180^\circ. \qquad (3)$$

Входящая в формулу (3) разность азимутов $(a_n - a_1)$ может быть получена непосредственно, если из конечных точек хода вести одновременные наблюдения одного и того же светила.

Проведем через центр вспомогательной небесной сферы прямые, параллельные отвесным линиям в точках *1* и *n* рассматриваемого хода.

На рис. 2 имеем обозначения:

Z_1 и Z_n — зениты точек *1* и *n*;

P — полюс мира;

σ — положение светила;

z_1, z_n — зенитные расстояния точки σ;

$\Delta\lambda = (\lambda_n - \lambda_1)$ — разность астрономических долгот конечных точек хода;

$-\Delta q = (q_n - q_1)$ — разность параллактических углов;

a_1, a_n — азимуты светила;

b_1, b_n — азимуты дуги Z_1Z_nK,

c_1, c_n — углы между вертикалами светила и дугой Z_1Z_nK.

Непосредственно из рис. 2 находим:

$$a_1 = b_1 - c_1;$$

$$a_n = b_n - c_n.$$

Отсюда

$$(a_n - a_1) = (b_n - b_1) - (c_n - c_1). \qquad (4)$$

Используя аналогии Непера для решения сферических треугольников PZ_1Z_n и σZ_1Z_n, получим:

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_n + \varphi_1)}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_n - \varphi_1)} = \frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Delta\lambda}{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(b_n - b_1)};$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(z_n + z_1)}{\cos\frac{1}{2}(z_n - z_1)} = -\frac{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Delta q}{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}(c_n - c_1)}.$$

Обозначив

$$\varphi_0 = \frac{1}{2}(\varphi_n + \varphi_1), \quad z_0 = \frac{1}{2}(z_n + z_1),$$

$$\Delta\varphi = \varphi_n - \varphi_1, \quad \Delta z = z_n - z_1,$$

находим

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b_n - b_1) = \sin\varphi_0 \sec\frac{\Delta\varphi}{2}\operatorname{tg}\frac{\Delta\lambda}{2}, \qquad (5)$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(c_n - c_1) = -\cos z_0 \sec\frac{\Delta z}{2}\operatorname{tg}\frac{\Delta q}{2}. \qquad (6)$$

Полученными выражениями определяются члены, входящие в правую часть равенства (4).

Анализируя формулы (4), (5) и (6), приходим к выводу, что подбором исходных пунктов и светила разность азимутов $(c_n - a_1)$ к нулевому значению не приводится, а ее вычисление не проще вычисления абсолютных значений азимутов. Поэтому нет смысла рекомендовать метод одновременного наблюдения светила для контроля высокоточных угловых измерений взамен определения азимутов Лапласа.

Вместе с тем нельзя отбрасывать этот метод как средство контроля угломерных работ низшего класса, особенно таких, как прокладка теодолитных ходов при изысканиях линий электропередач, нефте- и газопроводов, железных и шоссейных дорог и т. п. Эти ходы, как правило, имеют большую протяженность и через каждые 20—30 *км* должны привязываться к пунктам геодезической основы. При отсутствии такой возможности через каждые 30—40 углов поворота рекомендуется определять астрономический азимут стороны со средней квадратической ошибкой порядка $\pm 1'$.

В дальнейшем будем исходить из того, что астрономические наблюдения ведутся из конечных точек теодолитного хода длиной 25—30 *км* и максимальная разность астрономических координат точек определяется равенством.

$$\Delta\varphi_{\max} = (\Delta\lambda \cos\varphi)_{\max} = 15'.$$

Запишем известную дифференциальную зависимость

$$dz = \cos\varphi \sin a\, dt + \cos a\, d\varphi.$$

Нетрудно доказать, что

$$dq = (\cos\varphi \cos a dt - \sin a d\varphi) \operatorname{cosec} z.$$

Заменяя дифференциалы конечными приращениями и принимая во внимание, что Δt — разность часовых углов светила, наблюдаемого одновременно из двух пунктов, равна разности долгот $\Delta\lambda$, получим:

$$\Delta z = (\Delta\lambda \cos\varphi) \sin a + \Delta\varphi \cos a;$$

$$\Delta q \sin z = (\Delta\lambda \cos\varphi) \cos a - \Delta\varphi \sin a. \qquad (7)$$

Отсюда видим: Δz и $\Delta q \sin z$ имеют тот же порядок, что $\Delta\varphi$ и $\Delta\lambda \cos\varphi$.

Для нашего случая формулы (5) и (6), без нарушения их строгости, могут быть представлены так:

$$b_n - b_1 = \Delta\lambda \sin\varphi_0;$$

$$c_n - c_1 = -\Delta q \cos z_0.$$

Тогда

$$a_n - a_1 = \Delta\lambda \sin\varphi_0 + \Delta q \cos z_0.$$

Подставляя полученную разность в выражение (3), будем иметь

$$\Sigma\beta = \Delta\lambda \sin\varphi_0 + \Delta q \cos z_0 + (Q_n - Q_1) - \Sigma t_i - (\lambda_n \sin\varphi_n - \lambda_1 \sin\varphi_1) +$$
$$+ (L_n \sin\varphi_n - L_1 \sin\varphi_1) + i \cdot 180^\circ.$$

С точностью до $1''$—$2''$

$$\lambda_n \sin\varphi_n - \lambda_1 \sin\varphi_1 = \Delta\lambda \sin\varphi_0;$$

$$L_n \sin \varphi_n - L_1 \sin \varphi_1 = \Delta L \sin \varphi_0.$$

Поэтому

$$\Sigma \beta = \Delta q \cos z_0 + (Q_n - Q_1) - \Sigma t_i + \Delta L \sin \varphi_0 + i \cdot 180^\circ.$$

Величина t_i — измененная на 180° разность прямого и обратного азимутов i-й стороны хода — вычислится по формуле

$$t_i = l_i \sin B_m,$$

где l_i — разность долгот конечных точек i-й стороны хода, редуцированного на поверхность референц-эллипсоида, B_m — полусумма геодезических широт этих же точек.

Пусть $B_m = \varphi_0 + \Delta B$. Тогда

$$t_i = l_i \sin \varphi_0 - l_i \cos \varphi_0 \frac{\Delta B}{\rho}.$$

Второй член правой части равенства для данного хода не превысит 0″,1. Поэтому $\Sigma t_i = [l_i] \sin \varphi_0 = \Delta L \sin \varphi_0$.

Таким образом,

$$\Sigma \beta = \Delta q \cos z_0 + (Q_n - Q_1) + i \cdot 180^\circ. \qquad (8)$$

При выводе формулы (8) предполагалось, что светило из конечных точек хода наблюдается одновременно. На практике синхронность наблюдений строго соблюдаться не будет, и в разности азимутов светила будет допущена погрешность δa, определить которую можно из выражения

$$\delta a = \frac{\cos \delta \cos q}{\sin z} \Delta T, \qquad (9)$$

где $\Delta T = T_n - T_1$ — разность моментов наблюдения; δ — склонение светила.

Очевидно, что величина погрешности δa будет зависеть от выбора светила и точности, с которой обеспечивается одновременность наблюдений. Пусть на широте 60° в верхней кульминации наблюдается звезда, имеющая $z = 90^\circ$. Если потребовать для этого случая, чтобы $\delta a \leqslant 0',1$, то окажется, что $\Delta T \leqslant 0^s,5$. Соблюдение такой точности в оценке моментов наблюдения во время приближенных определений — нереальное дело. По этой причине нельзя воспользоваться наблюдениями светил вблизи горизонта.

Выражение (9) свидетельствует о том, что выгоднейшей из звезд, результаты наблюдений которой меньше всего исказятся асинхронностью, будет Полярная. При тех же условиях ($\varphi = 60^\circ$, $q = 0^\circ$, $\delta a \leqslant 0',1$) для Полярной звезды получим $\Delta T \leqslant 0^m,2$.

Таким образом, даже при самом неблагоприятном положении Полярной звезды одновременность наблюдений может быть обеспечена при использовании наручных или карманных часов.

Рассмотрим, как вычислится поправочный член $\Delta q \cos z_0$ в формуле (8), если наблюдать Полярную звезду.

На основании (7) будем иметь:

$$\Delta q \cos z = \cos \varphi \cos a \operatorname{ctg} z \, \Delta\lambda - \sin a \operatorname{ctg} z \, \Delta\varphi$$

или

$$\Delta q \cos z = -\Delta\lambda \sin \varphi + (\sin \varphi + \cos \varphi \cos a \operatorname{ctg} z) \Delta\lambda - \\ - \sin a \operatorname{ctg} z \, \Delta\varphi. \qquad (10)$$

Запись, заключенная в скобки, выражает скорость изменения азимута звезды:

$$\sin\varphi + \cos\varphi \cos a \operatorname{ctg} z = V_a = \frac{\Delta A}{15\,\Delta T}.$$

Ее можно определить по результатам измерений, приняв в качестве ΔA изменение горизонтального направления на Полярную звезду за промежуток времени ΔT.

Последний член в формуле (10)

$$\sin a \operatorname{ctg} z\, \Delta\varphi = \delta\varphi$$

будем называть поправкой за широту. Обозначим $k_\varphi = \sin a \operatorname{tg}\varphi$, полагая, что в случае наблюдения Полярной звезды $z = 90° - \varphi$. Тогда $\delta\varphi = k_\varphi \Delta\varphi$.

Знак поправки за широту $\delta\varphi$ определится знаками коэффициента k_φ и разности широт $\Delta\varphi$. С июня по январь месяцы Полярная звезда в начале ночи располагается к востоку от меридиана, с февраля по май — к западу от него. Поэтому коэффициент k_φ для наблюдений, выполненных после захода Солнца в период с июня по январь, получится отрицательным; для наблюдений, проведенных с февраля по май; — положительным.

Абсолютные величины коэффициента k_φ и поправки $\delta\varphi$ будут колебаться от нуля до некоторых максимальных значений, приведенных ниже.

φ	$\lvert k_\varphi \rvert_{max}$	$\lvert \delta\varphi \rvert_{max}$	$\lvert \delta\varphi \rvert_{ср}$
30°	0,012	0′,17	0,08
40	0,017	0,25	0,12
45	0,023	0,34	0,17
50	0,036	0,54	0,27
60	0,052	0,78	0,39

С учетом принятых обозначений формула (10) принимает следующий вид:

$$\Delta q \cos z = -\Delta\lambda \sin\varphi + V_a \Delta\lambda - \delta\varphi.$$

Подставляя в (8), получим

$$\Sigma\beta = i \cdot 180° + (Q_n - Q_1) - (\sin\varphi_0 - V_a)\Delta\lambda - \delta\varphi. \qquad (11)$$

Поправку $\delta\varphi$, ввиду ее малости, достаточно учитывать только на широтах, бо́льших 50°, пользуясь для этой цели приближенной формулой

$$\delta\varphi = \pm 0{,}02\Delta\varphi.$$

Постановка одновременных наблюдений вызывает некоторые трудности в организации работ. Их можно избежать, если учесть, что экваториальные координаты Полярной звезды меняются медленно. Так, в течение 10 дней прямое восхождение Полярной звезды изменится максимум на 14^s, склонение — на 3″. Эти изменения можно во внимание не принимать. Поэтому, если после выполнения работ на одной точке не позже, чем через 10 дней, приступить к работам на другой, наблюдая Полярную звезду в одни и те же моменты звездного времени первой точки, то получим тот же результат, что и при одновременных наблюдениях. В этом случае моменты наблюдения Полярной звезды из второй точки необходимо предвычислить.

Пусть T_1 — показание часов в момент наблюдения Полярной звезды на пункте 1. Тогда в соответствующий ему момент на пункте n показание часов T_n получим из выражения

$$T_n = T_1 + 3^m56^s \cdot m,$$

где m — число суток, разделяющих моменты T_1 и T_n.

Так как отсчет по часам T_n необходимо вычислять заранее, то целесообразно пользоваться для этого формулой

$$T_n = T_1 + 3^m56^s \cdot m - \Delta\lambda. \qquad (12)$$

Тогда из пункта n Полярная звезда будет наблюдаться на том же часовом угле, что и из пункта 1; V_a в формуле (11) принимает нулевое значение, и сумма углов хода определится проще:

$$\Sigma\beta = i \cdot 180^\circ + (Q_n - Q_1) - \Delta\lambda \sin\varphi - \delta\varphi. \qquad (13)$$

Угловую невязку хода при измерении левых углов получим из выражения

$$f_\beta = (\Sigma\beta_л - i \cdot 180^\circ) - [(Q_n - Q_1) - \Delta\lambda \sin\varphi_0 - \delta\varphi]. \qquad (14)$$

Если измерялись правые углы, то

$$f_\beta = (\Sigma\beta_п - i \cdot 180^\circ) + [(Q_n - Q_1) - \Delta\lambda \sin\varphi_0 - \delta\varphi]. \qquad (14')$$

Для передачи дирекционного угла следует пользоваться формулой

$$d_n = d_1 + (Q_n - Q_1) - \Delta\lambda \sin\varphi_0 - \delta\varphi. \qquad (15)$$

На основании изложенного можно рекомендовать следующий порядок работ:

1. Теодолит, приспособленный для ночных наблюдений, засветло устанавливают над точкой и тщательно выполняют необходимые поверки. Следует особо позаботиться об устойчивости инструмента и сохранении осью вращения трубы горизонтального положения. Коллимационную ошибку приводят к минимальному значению. По радиосигналам времени подправляют установку минутной стрелки часов. Колебания суточного хода часов должны иметь порядок $\pm 1^m$. Над одной из смежных точек хода устанавливают светящуюся марку.

2. Наблюдения начинают сразу же после появления Полярной звезды и выполняют их в такой последовательности:

а) марка,
б) Полярная звезда,
в) перевод трубы через зенит,
г) Полярная звезда,
д) марка.

Получают один прием наблюдений. Делают не менее трех таких приемов, переставляя в промежутке между ними лимб горизонтального круга. Визируя на марку, берут отсчет по горизонтальному кругу. Визирование на Полярную звезду сопровождается отсчетами по часам (с точностью до $0^m,1$) и по горизонтальному кругу.

3. В последующие дни производят геодезические работы на трассе и только после удлинения ее на 30—40 углов поворота организуют повторные астрономические наблюдения. Эти наблюдения должны быть выполнены не позднее, чем через 10 дней после первых. Моменты визирования на Полярную звезду для каждого полуприема заранее вычисляют по формуле $T_n = T_1 + 3^m56^s \cdot m - \Delta\lambda$ и записывают в журнале с точностью до $0^m,1$.

Повторные наблюдения ведутся в уже описанной последовательности. Их отличие от первых будет в том, что визировать на Полярную звезду приходится не в произвольные, а в предварительно вычисленные моменты.

4. Обрабатывают результаты наблюдений так:

а) в каждом приеме находят средние значения отсчетов по часам и по горизонтальному кругу;

б) вычисляют горизонтальные углы Q (направление на марку минус направление на Полярную звезду) и образуют разности $Q_n - Q_1$ углов, измеренных в одном и том же по номеру приеме;

в) определяют сближение меридианов $\Delta\lambda \sin\varphi$ и, если район работ расположен на широте более 50°, находят поправку $\delta\varphi = \pm 0{,}02\Delta\varphi$, имея в виду, что $\Delta\varphi = \varphi_n - \varphi_1$ получает свой знак, а знак перед коэффициентом выбирается в зависимости от времени наблюдений: для вечерних наблюдений с июня по январь — минус, с февраля по май — плюс; если $\varphi < 50°$, то $\delta\varphi = 0$;

г) определяют угловую невязку хода по формулам (14) или (14′); суммированию подлежат все углы хода, заключенные между сторонами, соединяющими точки стояния теодолита и марок.

Летом 1967 г. на геодезическом полигоне Львовского политехнического института нами были проведены опытные наблюдения. Углы измерялись теодолитом ТТ5, время фиксировалось наручными часами, показания которых контролировались приемом широковещательных сигналов времени с помощью использования транзисторного радиоприемника.

Наблюдения велись по рекомендуемой выше программе; 28 августа — на Δ Вишневом, 29 августа — на Δ Носове. Между пунктами триангуляции проложен ход городской полигонометрии повышенной точности. Взаимное расположение пунктов характеризуется следующими величинами:

$$\Delta\lambda = \lambda_H - \lambda_B = +1^s \cdot 3,$$

$$\Delta\varphi = \varphi_H - \varphi_B = -5'40''.$$

В таблицах 1 и 2 приведены в качестве примера результаты измерений в первых приемах.

Таблица 1

ЖУРНАЛ НАБЛЮДЕНИЙ

Дата: 28 августа 1967 г. Место: Δ Вишневый.

Инструмент: ТТ5 № 34205. Часы: наручные.

Прием 1

Объект наблюдения	Время, T	Горизонтальный круг I	II	$\frac{I+II}{2}$	$\frac{Л+(П\pm180°)}{2}$	Q_B
		Круг Л				
Марка над ОП		97°26′30″	26′00″	26′15″	97°26′22″	23°58′37″
Полярная звезда	$22^h22^m.4$	73 27 00	27 00	27 00	73 27 45	
		Круг П				
Полярная звезда	22 25 .5	253 28 30	28 30	28 30		
Марка над ОП		277 26 30	26 30	26 30		
$T_{ср}$	22 24 .0					

Вычисление угловой невязки хода

$\Sigma\beta_\Delta$	4 412°11′14″
$i \cdot 180°$	4 320
$\Sigma\beta_\Delta - i \cdot 180°$	92 11 14
$(Q_H - Q_B)_{ср} - \delta\varphi - \Delta\lambda \sin\varphi$	92 11 42
f_β —	0′28″

Таблица 2

ЖУРНАЛ НАБЛЮДЕНИЙ

Дата: 29 августа 1967 г. Место: △ Носово
Инструмент: ТТ5 № 34205. Часы: наручные.

Прием 1

Объект наблюдения	Время, T	Горизонтальный круг I	Горизонтальный круг II	$\frac{I+II}{2}$	$\frac{Л+(П\pm180°)}{2}$	$Q_н$
		Круг $П$				
Марка над ОП		253°58′00″	58′30″	58′15″	73°57′52″	116°10′00″
Полярная	$22^h26^m.3$	137 48 00	48 30	48 15	317 47 52	
		Круг $Л$				
Полярная	22 29 .5	317 48 00	47 00	47 30		
Марка над ОП		73 57 30	57 30	57 30		
$T_{ср}$	22 27 .9					

Ниже приводим данные обработки наблюдений.

Таблица 3

Вычисление разностей горизонтальных углов Q

Номера приема	$Q_н$	$Q_в$	$Q_н-Q_в$	v
I	116°10′00″	23°58′37″	92°11′23″	— 39″
II	10 22	58 52	11 30	— 32
III	09 46	58 30	11 16	— 46
IV	09 30	59 00	10 30	— 92
V	10 16	57 52	12 24	+ 22
VI	10 00	57 37	12 23	+ 21
VII	10 15	57 14	13 01	+ 59
VIII	10 45	57 00	13 45	+ 103
		$(Q_н-Q_в)_{ср}$	92 12 02	$[vv]$
		$-\delta\varphi$	— 7	28 141
		$-\Delta\lambda \sin\varphi$	— 13	

$$m_{\Delta Q} = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{7}} = \pm 63'', \quad M_{\Delta Q} = \pm 23''.$$

Таким образом, наблюдения Полярной звезды на равных часовых углах из точек теодолитного хода, удаленных друг от друга не более, чем на 30 *км*, приводят к простому и доступному методу контроля угловых измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козлов Н. А. Одно замечание к статье профессора Ф. Ф. Павлова «Передача дирекционного угла астрономическим путем в одной координатной зоне». Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 5, 1966.
2. Павлов Ф. Ф. Передача дирекционного угла астрономическим путем в одной координатной зоне. Известия вузов СССР. Геодезия и аэрофотосъемка, вып. 1, 1965.

Работа поступила
27 ноября 1967 г.