УДК 004.9

Б. Дупак
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра систем автоматизованого проектування

ОСНОВНІ ДЕФОРМАЦІЇ КАНТЕЛІВЕРА МЕХАНІЧНОГО ТИПУ

© Дупак Б., 2011

Розглянуто основні деформації кантелівера механічного типу за дії вертикальної, подовжньої і поперечної сил.

Ключові слова: кантелівер, атомно-силовий мікроскоп, зонд, мікроскоп.

This paper is considered the main deformation of cantilever of mechanical type action under the vertical, longitudinal and lateral forces.

Keywords: cantilever, atomic force microscope, probe, microscope.

Вступ

Кантелівер – це найпоширеніший датчик силової взаємодії в атомно-силовій мікроскопії(АСМ). Будь-яку інформацію про поверхню атомно-силовий мікроскоп отримує завдяки механічним відхиленням балки кантелівера, які реєструються оптичною системою. Для безконтактної мікроскопії часто використовують резонатори камертонного типу замість кантеліверів. У такому сенсорі стежать за зміною резонансної частоти у разі появи силової взаємодії зонда з поверхнею [1].

Зазвичай кантелівер є балкою у вигляді прямокутного паралелепіпеда (рис. 1а), що має довжину l, товщину t ($t \ll l$) і ширину w ($w \ll l$) або у вигляді двох балок, сполучених під деяким кутом (рис. 1б), із зондом (вістрям) завдовжки l_{tip} на одному з її кінців. Далі детально розглянемо прямокутний кантелівер. Геометричні розміри, що характеризують його, показано на рис. 1а. З поверхнею взаємодіє вістря зонда. Вважатимемо, що саме до його вершини прикладена зосереджена сила, що діє з боку досліджуваного зразка [3].

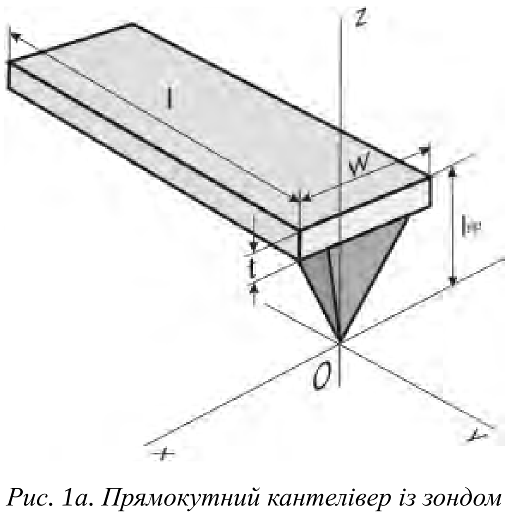

Рис. 1а. Прямокутний кантелівер із зондом

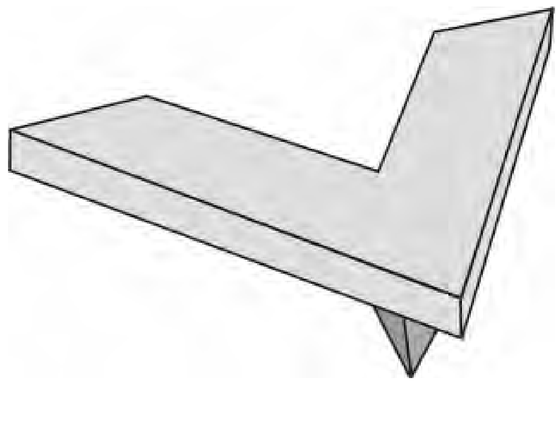

Рис. 1б Трикутний кантелівер із зондом

Сила, що діє на зонд, часто має не лише вертикальну складову, але і компоненти, які лежать у горизонтальній площині. Тому вістря кантелівера може відхилятися не лише уздовж осі Oz, але й у двох інших напрямах: Ox і Oy (див. рис. 1а). Вертикальну складову назвемо нормальною силою, поперечну F_z і поздовжню F_y – латеральними силами.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Оскільки в АСМ про силу дії зразка на кантелівер судять за деформацією останнього, то для визначення сили необхідно знати жорсткість деформацій кантелівера у різних напрямах. Вважаємо, що вектор відхилення вістря кантелівера $\mathbf{\Delta}$ (що має компоненти $\Delta x, \Delta y, \Delta z$) пов'язаний з прикладеною до зонда силою $\mathbf{F}$ лінійно, тобто за законом Гука [2].

$$\mathbf{\Delta} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{F}. \tag{1}$$

"Коефіцієнтом" пропорційності є тензор другого рангу C, який назвемо тензором зворотної жорсткості. Ця величина містить всю інформацію про пружні властивості кантелівера.

Аби знайти компоненти тензора C, необхідно вирішити завдання про статичні деформації кантелівера під дією сил, напрямлених по різних осях. Для наочності запишемо формулу (1) у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{xx} & c_{xy} & c_{xz} \\ c_{yx} & c_{yy} & c_{yz} \\ c_{zx} & c_{zy} & c_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Зазначимо, що оптична система реєструє не відхилення вістря кантелівера, а нахил верхньої поверхні кантелівера поблизу його вільного кінця. Безпосередньо вимірюються два кути: відхилення нормалі від вертикалі в площині Oyz (кута α) і в ортогональному напрямі – площині Oxz (кута β).

Для зручності розрахунків можна замість (2) записати матричне співвідношення, що зв'язує кути α і β безпосередньо з компонентами сили $\mathbf{F}$.

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{\alpha x} & b_{\alpha y} & b_{\beta y} \\ b_{\beta x} & b_{\beta y} & b_{\beta y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Проте введена матриця на відміну від тензора C не містить повної інформації про пружні властивості кантелівера.

Відхилення за дії вертикальної сили

Визначимо величину і напрям деформації за дії вертикальної сили F_z. Розв’язанням цієї задачі можна знайти останній стовпець тензора C.

$$\Delta x = c_{xz} F_z \tag{4}$$

$$\Delta y = c_{yz} F_z \tag{5}$$

$$\Delta z = c_{zz} F_z . \tag{6}$$

За дії вертикальної сили, що відхиляє, виникає вертикальний вигин z-типу. Цей тип деформації показано на рис. 2.

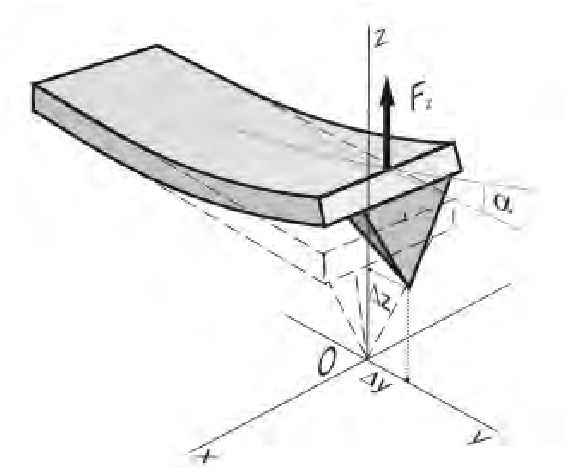

Рис. 2. Вертикальний вигин z-типу

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Виділимо з балки двома поперечними перетинами елемент завдовжки L і розглянемо його деформацію (рис. 2). Оскільки цей елемент зігнутий, то матеріал на зовнішній стороні вигину розтягнутий, а на внутрішній стороні стиснений. Але є нейтральна поверхня, яка і не стиснена, і не розтягнута. Для спрощення обчислень вважатимемо, що поперечні перетини балки залишаються плоскими і нормальними до її деформованої осі (прямий чистий вигин балки постійного перетину). Останнє припущення справедливе за умови $l/t \geq 8$, яка виконується у межах цього випадку [4].

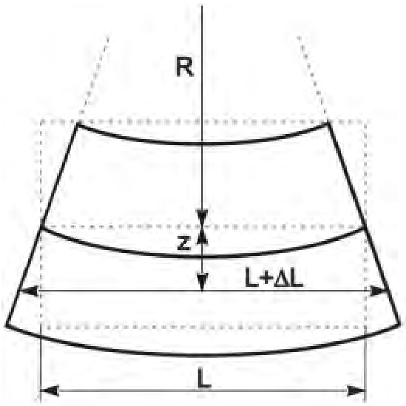

Рис. 3а. Маленький відрізок зігнутої балки

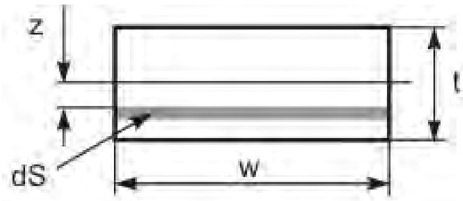

Рис. 3б. Поперечний перетин балки

Для чистого вигину нейтральна поверхня проходить через центр тяжіння поперечного перетину, тобто в нашому випадку подовжня вісь симетрії паралелепіпеда належить нейтральній поверхні. Подовжнє подовження матеріалу ΔL пропорційне відстані z від нейтральної поверхні: $\Delta L / L = z / R$ (рис. 2). Отже, за законом Гука сила, що діє на одиничну площу в деякій маленькій смужці площею dS поблизу z, дорівнює $dF = EzdS / R$ де E – модуль Юнга, R – радіус кривизни балки. Якщо розглянути будь-який поперечний перетин, то сили, що діють на нього, напрямлені в один бік вище за нейтральну поверхню і в інший – нижче за неї. Тобто існує пара сил, яка створює момент M_z, що вигинає, під яким розуміють момент сил відносно нейтральної лінії:

$$M_z = \int_S z dF = \frac{E}{R} J_z. \tag{7}$$

Величину J_z називають осьовим моментом інерції перетину балки відносно осі, що проходить через його центр мас. Для балки з прямокутним поперечним перетином

$$J_z = \int_S z^2 dS = \frac{wt^3}{12}. \tag{8}$$

Позначимо відхилення в z-напрямленні точки балки на відстані y від закріпленого кінця через $u(y)$. Кривизна кривої $u(y)$ при малих вигинах ($du/dy \ll 1$) задається виразом $1/R(y) = d^2u/dy^2$. Враховуючи (7), момент сил M_z, що вигинає, можна подати як:

$$M_z(y) = EJ_z \frac{d^2b}{dy^2}. \tag{9}$$

З іншого боку, M_z є моментом сил відносно крапки в, обумовленим дією сили F_z – $M_{F_z} = F_z(l-y)$ і власною вагою балки – $M_{mg} = -\frac{mg}{l}\int_y^l p dp = -\frac{mg}{2l}(l^2 - y^2)$. Отже, отримуємо рівняння:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{F_z}{EJ_z}(l-y) - \frac{mg}{2lEJ_z}(l^2 - y^2). \tag{10}$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Інтегруючи його з врахуванням граничних умов, отримуємо розв'язок:

$$u(y) = \frac{F_z}{6EJ_z}(3l - y)y_2 - \frac{mg}{24lEJ_z}(6l^2 - y^2)y^2. \tag{11}$$

Відхилення кінця балки Δz (рис. 2):

$$\Delta z = u\Big|_{y-l} = \frac{F_z}{3EJ_z} - \frac{5mg}{24EJ_z}. \tag{12}$$

Другий доданок – це прогин під дією власної ваги. Для типового кантелівера він становить частки ангстрема і може бути опущений на тлі першого члена, який в АСМ експериментах у сотні разів більший. Залежність (12) є ні що інше, як співвідношення (6), в якому потрібно зробити

$$c_{zz} = \frac{l^3}{3EJ_z} = c. \tag{13}$$

Кут відхилення кінця балки, порахований вже без врахування другого члена в (8):

$$\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{du}{dy}\Big|_{y-l} = \frac{F_z l^2}{2EJ_z} = \frac{3}{2l}cF_z = \frac{3}{2}\frac{\Delta z}{l}. \tag{14}$$

Коефіцієнт зворотної жорсткості c_{zz} є найбільшим серед останніх компонент тензора С. У формулі (13) для цього параметра введено спеціальне позначення –**с** без індексів. Саме величину **1/с** позначено як жорсткість у характеристиках кантелівера, як один з його найважливіших параметрів. Нижче для наочності виділятимемо загальний множник всіх елементів матриці С (2). Для кантелівера з прямокутним поперечним перетином можна переписати (13):

$$c = \frac{4l^3}{Ewt^3}. \tag{15}$$

З формули (14) і геометрії вертикального вигину z-типу (рис. 1) нескладно знайти відхилення вістря зонда, Δy що виникає за дії F_z додатка:

$$\Delta y = \alpha \cdot l_{tip} = \frac{3}{2}\frac{l_{tip}}{l}\Delta z. \tag{16}$$

З (13) і (2) очевидно, що

$$c_{yz} = \frac{3}{2}\frac{l_{tip}}{l}c. \tag{17}$$

Враховуючи, що $\Delta x = 0$, зазначимо:

$$c_{xz} = 0. \tag{18}$$

Нарешті, запишемо компоненти останньої колонки матриці (3). З формул (12–14) можна отримати

$$b_{\alpha z} = \frac{3}{2l}c. \tag{19}$$

Оскільки під дією сили F_z не відбувається нахилу верхньої площини кантелівера у напрямі Oxz, то

$$b_{\beta z} = 0. \tag{20}$$

Відхилення за дії поздовжньої сили

Визначимо величину і напрям деформації за дії поздовжньої сили F_y. Розв'язанням цієї задачі можна знайти середній стовпець тензора С.

$$\Delta x = c_{xy}F_y; \tag{21}$$

$$\Delta y = c_{yy}F_y; \tag{22}$$

$$\Delta z = c_{zy}F_y. \tag{23}$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Сила, що діє у напрямі осі кантелівера, створює момент, що викликає деформацію, яку назвемо вертикальним вигином y-типу (рис. 4) [2].

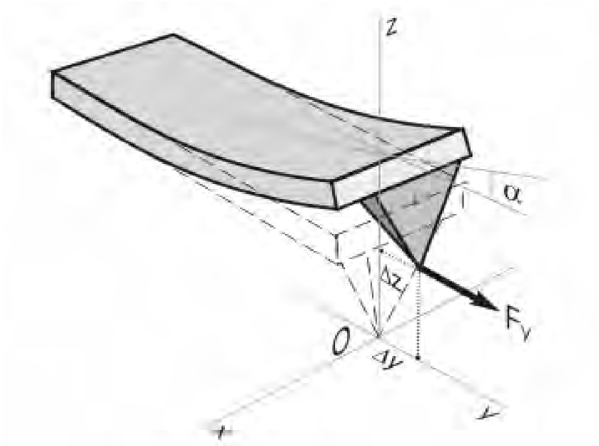

Рис. 4. Вертикальний вигин y-типу

Незважаючи на зовнішню схожість з вертикальним вигином z-типу, в цьому випадку профіль деформації буде іншим. Рівняння, що описує вигин y-типу, має такий вигляд:

$$\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{F_y l_{tip}}{EJ_z}. \tag{24}$$

Граничні ж умови залишаться колишніми: $u\big|_{y=0}=0$ і $\frac{du}{dy}\big|_{y=0}=0$. Знайти розв'язок просто:

$$u(y)=\frac{F_y l_{tip}}{2EJ_z}y^2. \tag{25}$$

Отже, відхилення вістря по вертикалі за цього типу деформації становитиме

$$\Delta z=u(l)=\frac{F_y l_{tip} l^2}{2EJ_z}=\frac{3}{2}\frac{l_{tip}}{l}cF_y. \tag{26}$$

Порівнюючи (26) і (23) і виносячи в отриманому виразі загальний множник з (13), отримаємо:

$$c_{zy}=\frac{l_{tip}l^2}{2EJ_z}=\frac{3l_{tip}}{2l}c. \tag{27}$$

Кут відхилення кінця балки α дорівнюватиме

$$\alpha=\frac{du}{dy}\Big|_{y=l}=\frac{F_y l_{tip} l}{EJ_z}=\frac{3l_{tip}}{l^2}cF_y=2\frac{\Delta z}{l}. \tag{28}$$

З формули (28) і геометрії вертикального вигину y-типу (рис. 4) нескладно знайти відхилення вістря зонда Δy, що виникає за дії F_y :

$$\Delta y=\alpha l_{tip}=\frac{2l_{tip}}{l}\Delta z. \tag{29}$$

З (22), (27) і (29) легко отримати:

$$c_{yy}=\frac{2l_{tip}}{l}c_{zy}=\frac{3{l_{tip}}^2}{l^2}c. \tag{30}$$

Отже,

$$c_{xy}=0. \tag{31}$$

Нарешті, запишемо компоненти середньої колонки матриці (3). За формулами (26–28) можна отримати

$$b_{\alpha y}=\frac{3l_{tip}}{l^2}c. \tag{32}$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Оскільки за дії сили F_y не відбувається нахилу верхньої площини кантелівера у напрямі Oxz , то

$$b_{\beta y} = 0 . \quad (33)$$

Відхилення за дії поперечної сили

Визначимо величину і напрям деформації за дії поперечної сили. Розв'язанням цієї задачі можна знайти середній стовпець тензора С.

$$\Delta x = c_{xx} F_x ; \quad (34)$$

$$\Delta y = c_{yx} F_x ; \quad (35)$$

$$\Delta z = c_{zx} F_x . \quad (36)$$

За дії поперечної сили виникає складна деформація, яка є суперпозицією плоского вигину і кручення (рис. 5а і 5б) [2].

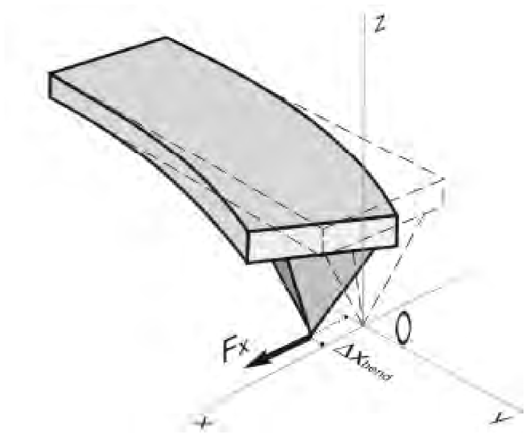

Рис. 5а. Плоский вигин

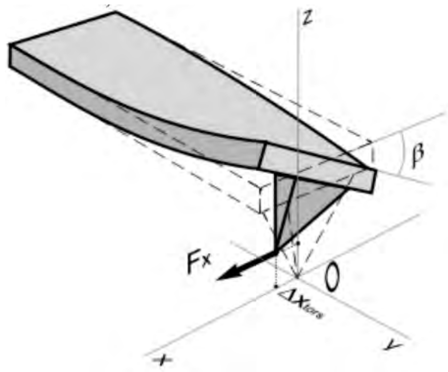

Рис. 5б. Кручення

Зворотну жорсткість плоского вигину (рис. 5а) знайти просто. Ця деформація аналогічна вертикальному вигину z-типу (рис. 2), з тією лише різницею, що в остаточному виразі для зворотної жорсткості (15) треба поміняти місцями ширину і товщину балки кантелівера ($w \Leftrightarrow t$). Тобто

$$c_{bend} = \frac{4l^3}{Ew^3 t} = \frac{t^2}{w^2} c. \quad (37)$$

Розв'язання задачі кручення балки прямокутного перетину є непростим. Залежність кута кручення β від моменту, що додається до торця балки, сили М наведемо без виводу:

$$\beta = \frac{3lM}{Gwt^3}, \quad (38)$$

де G – модуль зрушення.

Бічна сила F_x діє на кінець зонда завдовжки l_{tip}, тоді круткий момент рівний $M = F_x l_{tip}$. Своєю чергою, бічний зсув вістря пов'язаний з кутом кручення як $\Delta x_{tors} = \beta l_{tip}$. Відповідно, зворотний коефіцієнт жорсткості:

$$c_{tors} = \frac{\Delta x_{tors}}{F_x} = \frac{3 l_{tip}{}^2 l}{Gwt^3}. \quad (39)$$

Знаючи, що $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$, а коефіцієнт Пуассона $\nu \approx 1/3$ (для більшості матеріалів), з врахуванням виразу для **c** (15), запишемо:

$$c_{tors} \approx \frac{8 l_{tip}{}^2 l}{Ewt^3} = \frac{2 l_{tip}{}^2 l}{l^2} c. \quad (40)$$

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua

Аби знайти результуюче зрушення вістря зонда при суперпозиції плоского вигину і кручення при малих деформаціях, достатньо скласти відповідні відхилення:

$$\Delta x = \Delta x_{bend} + \Delta x_{tors} = c_{bend} F_x + c_{tors} F_x = c_{xx} F_x. \tag{41}$$

Отже, результуюча зворотна жорсткість також буде сумою зворотних жорсткостей плоского вигину і кручення:

$$c_{xx} = \left(\frac{2 l_{tip}{}^2}{l^2} + \frac{t^2}{w^2} \right) c. \tag{42}$$

Звернемо увагу на те, що для більшості кантеліверів зворотна жорсткість плоского вигину c_{bend} (37) виявляється набагато більшою ніж зворотна жорсткість кручення c_{tors} (39), тому зазвичай плоским вигином можна нехтувати. Для стандартного АСМ кантелівера CSC12 з параметрами $l = 90 \mu m$, $l_{tip} = 10 \mu m$, $w = 35 \mu m$, $t = 1 \mu m$ і жорсткістю $1/c = 0,52 N/m$ латеральні константи жорсткості дорівнюють:

$$c_{tors} \approx \frac{1}{40} c \approx 0,05 \frac{m}{N}, \quad c_{bend} \approx \frac{1}{1220} c \approx 0,0016 \frac{m}{N}. \tag{43}$$

Нескладно зазначити, що як при плоскому вигині, так і при крученні, окрім відхилення Δx, виникають деформації Δy і Δz відповідно. Проте величина цих зсувів наступного порядку крихти порівняно з Δx, а зв'язок відхилення з прикладеною силою стає не лінійним, а квадратичним, тобто "негуківським". Покажемо це, наприклад, для кручення.

З рис. 6 видно, що

$$\Delta z = l_{tip} (1 - \cos \beta) \approx l_{tip} \frac{\beta^2}{2}, \tag{44}$$

тоді як

$$\Delta x = l_{tip} \cdot \beta. \tag{45}$$

Оскільки $\beta \ll 1$, то і $\Delta z \ll \Delta x$. Аналогічно при плоскому вигині $\Delta y \ll \Delta x$, тому можна вважати

$$c_{yx} = c_{zx} = 0. \tag{46}$$

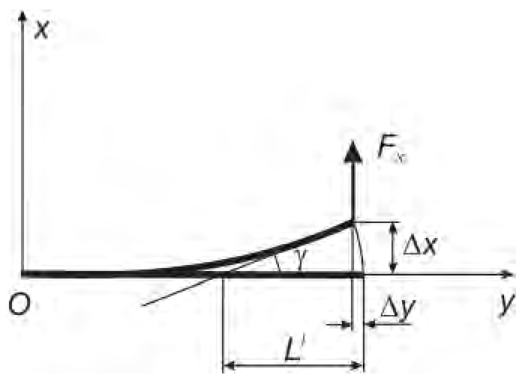

Рис. 6. До обчислення c_{yx}

Нарешті, запишемо компоненти першої колонки матриці (2). За дії поперечної сили F_x нормаль до верхньої поверхні кантелівера нахиляється в площині Oxz, тому з (11–13) можна вивести

$$b_{\beta x} = \frac{2 l_{tip}}{l^2} c. \tag{47}$$

Відповідно, відхилення в напрямі Oyz відсутнє:

$$b_{\alpha x} = 0. \tag{48}$$

Зазначимо, що відмінний від нуля кут β створює лише крутильна деформація, за плоского вигину поверхня кантелівера залишається горизонтальною. Отже, плоский вигин ніяк не може бути зареєстрований – його величину можна обчислити лише за формулами. Проте для визначення поперечної сили F_x в експерименті достатньо реєструвати лише деформацію кручення.

1. Weaver J. M. R., Abraham D. W. High resolution atomic force microscopy potentiometry, J. Vac. Sci., Technol. B 9, 2004. 2. Bhushan B. Springer Handbook of Nanotechnology, apr. 2007. 3. Albrecht T. R., Akamine S., Carver T. E., Quate C. F. Microfabrication of cantilever styli for the force microscope, J. Vac. Sci. Technol., 2006. 4. Linnemann R., Gotszalk T., Rangelow I. W., Dumania P., Oesterschulze E., Atomic force microscopy and lateral force microscopy using piezoresistive cantilevers, 2000.

Lviv Polytechnic National University Institutional Repository http://ena.lp.edu.ua