УДК 004.032.026

П.В. Тимощук
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра систем автоматизованого проектування

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ НЕЙРОННОЇ СХЕМИ ТИПУ "K-WINNERS-TAKE-ALL" ОБРОБКИ ДИСКРЕТИЗОВАНИХ СИГНАЛІВ

Пропонується математична модель нейронної схеми типу "K-winners-take-all" (KWTA), призначеної для ідентифікації K максимальних серед N невідомих дискретизованих сигналів, де $1 \le K < N$. Від аналогів модель відрізняється високою роздільною здатністю, обчислювальною простотою, здатністю обробляти сигнали з довільного скінченного діапазону, властивістю збереження упорядкованості сигналів.
Ключові слова: нейронна схема типу "K-winners-take-all".

Mathematical model of discrete-time K-winners-take-all (KWTA) neural circuit that can identify K maximal from N unknown signals, where $1 \le K < N$ is proposed. In contrast to existing analogs the model has high resolution, calculation simplicity, it can process signals located in arbitrary finite range and possesses signal ordering preserving property.
Keywords: K-winners-take-all (KWTA).

1. Вступ

Відомо, що нейронні мережі типу "K-winners-take-all" (KWTA-мережі) здійснюють вибір K серед N елементів з більшими активаційними функціями, ніж у решти $N-K$ елементів. Коли K дорівнює одиниці, KWTA-мережа є мережею типу "Winner-takes-all" (WTA-мережею), яка може розрізняти нейрон з максимальною активацією [7], [12], [13].

Вибір K найбільших елементів з множини даних N дійсних чисел є ключовою задачею мереж прийняття рішень, розпізнавання образів, пов'язаних пам'ятей і конкуруючого навчання [14], [18]. Задачі такого типу, природно, виникають під час розв'язання задач класифікації і застосовуються для розроблення класифікаційних нейронних мереж, для розв'язання задач розпізнавання і класифікації зразків [6]. KWTA-мережі використовуються у телекомунікаціях, особливо для керування пакетними перемикачами даних [1]. KWTA-механізми мають важливі застосування у машинному навчанні, зокрема, при розв'язанні задач класифікації k найближчих об'єктів, кластеризації k значень тощо [5, 8].

Для розв'язання задач типу "K-winners-take-all" запропоновано різні види нейронних мереж. Зокрема, KWTA-механізм, який для надійної збіжності K переможців використовує нейронну мережу Хопфілда неперервного часу, пропонується в [9]. Встановлено, що стани такої мережі збігаються до стійкої рівноваги. Мережа використовує модель Хопфілда (адитивну модель Гросберга) і характеризується затримуючими взаємозв'язками, для яких коефіцієнт підсилення сигмоїдної активаційної функції повинен бути достатньо великим. Стани рівноваги мережі є асимптотично стабільними. У встановленому режимі мережа демонструє K компонентів із значеннями $\alpha > 0$ і N-K компонентів з $\beta < 0$. Частковий випадок мереж, що взаємно затримують, призначених для проектування KWTA-мережі за допомогою інтерактивних активацій, описується в [15]. Доведено, що за відповідно вибраних параметрів така KWTA-мережа є дуальною мережі з [9].

KWTA-нейронні мережі обробки дискретизованих сигналів порівняно з аналоговими мережами є надійнішими і демонструють вищу точність обробки сигналів [3]. Так, проста і швидкодіюча KWTA-нейронна мережа обробки дискретизованих сигналів, яка не використовує концепції обопільного затримання для великої кількості вхідних сигналів, запропонована в [16]. Мережа, що має одношарову структуру, визначає динамічне зсування необхідної кількості переможців для досягнення KWTA-режиму. Мережа характеризується обмеженим діапазоном обробки сигналів, потребує скидання початкового динамічного зсуву до центра діапазону зміни вхідних сигналів і вимагає додаткової схеми контролю.

Переважна більшість існуючих KWTA-мереж мають обмежену роздільну здатність, відзначаються обчислювальною складністю, обмеженим діапазоном обробки сигналів, для повторного використання такі мережі вимагають прецизійного відновлення їх початкових станів. Відповідні енергетичні функції мереж містять багато локальних мінімумів і не мають глобального мінімуму. Тому вихідні сигнали мереж можуть прямувати до різних встановлених режимів, що перешкоджає їх застосуванню для обробки сигналів у реальному часі [2, 4, 10, 11, 15, 17].

У статті пропонується математична модель KWTA-нейронної схеми обробки дискретизованих сигналів. Модель характеризується теоретично нескінченною роздільною здатністю, простотою, спроможністю обробляти сигнали будь-яких скінченних значень, незалежністю від початкових умов.

2. Постановка задачі

Нехай задано N дійсних чисел від a_1 до a_N, $N > 1$, тобто $a_1, a_2, ..., a_N$, як миттєвих значень невідомих вхідних сигналів і необхідно вибрати K найбільших з них, що називаються переможцями, де $1 \le K < N$ – ненегативне ціле. Припустимо, що задані числа розподілені у відомому діапазоні $a \in (A_{min}, A_{max})$. Приймемо, що вони не рівні між собою (відрізняються між собою за величиною) і впорядковані за спаданням так, що задовольняються нерівності

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_N, \tag{1}$$

де індекси $1, 2, \cdots, N$ взагалі можуть відрізнятись від оригінальних номерів входів, означаючи, що компоненти вектора $a = [a_1, \cdots, a_N]$ – впорядковані. Нехай необхідно побудувати математичну модель нейронної схеми, що обробляє вектор вхідних дискретизованих сигналів a так, що після скінченної кількості ітерацій отримуються вихідні сигнали схеми $b = [b_1, \cdots, b_N]$, які задовольняють нерівності

$$b_i > 0, i \in 1, 2, \cdots, K; b_j < 0, j \in K+1, K+2, \cdots, N. \tag{2}$$

Нерівності (2) виражають KWTA-властивість, тобто те, що саме вихідні сигнали від b_1 до b_K "виграють" конкуренцію і той факт, що тільки вони є позитивними компонентами вектора b, свідчить про те, що вхідні сигнали від a_1 до a_K є K найбільшими компонентами вектора a. Інакше кажучи, необхідно спроектувати нейронний класифікатор, який вибирає K найбільших вхідних сигналів вектора a. У наступному розділі подана ітеративна математична модель нейронної схеми такого класифікатора.

3. Математична модель KWTA-нейронної схеми обробки дискретизованих сигналів

Виконаємо попередню обробку заданого вектора a вхідних сигналів, віднявши від усіх їхніх компонентів значення A_{min} для отримання додаткових сигналів

$$c_1 > c_2 > \cdots > c_N, \tag{3}$$

де $c_n = a_n - A_{min}$, $n = 1, 2, ..., N$. Неважко побачити, що сигнали (3) лежать у діапазоні $(0, A)$, де $A = A_{max} - A_{min} > 0$, тобто $c \in (0, A)$, де $c = [c_1, c_2, ..., c_N]$. Оскільки вхідні сигнали (1) не рівні між собою і розподілені у відомому діапазоні, то сигнали (3) також різні й обмежені в діапазоні $(0, A)$. Отже, для будь-яких $1 \le K < N$ існують такі значення $x \in \Re$, що задовольняють такі нерівності:

$$c_i > x, i \in 1,2,\cdots,K; c_j < x, j \in K+1, K+2,\cdots,N. \tag{4}$$

Віднімання x від нерівностей (4) дає

$$c_i - x > 0, i \in 1,2,\cdots,K; c_j - x < 0, j \in K+1, K+2,\cdots,N. \tag{5}$$

Як можна побачити з нерівностей (5), сигнали $c_n - x$, де $n = 1,2,...,N$, володіють KWTA-властивістю. Тому такі сигнали можна використати як вихідні сигнали моделі KWTA-нейронної мережі, тобто можна записати рівності

$$b_i = c_i - x, i \in 1,2,\cdots,K; b_j = c_j - x, j \in K+1, K+2,\cdots,N. \tag{6}$$

Для побудови потрібної моделі необхідно розробити процедуру для знаходження значення скалярного динамічного зсуву вхідних сигналів x, що задовольняє нерівності (4). Використаємо для цього вимогу, що такий зсув у встановленому режимі повинен міститись у діапазоні $(0, A)$. Спроектуємо траєкторію дискретного часу $x^{(k)}$, де $k = 1,2,...,m$ – кількість ітерацій до досягнення встановленого режиму, яка може перетнути весь діапазон $(0, A)$. Нехай траєкторія буде розв'язком відповідного різницевого рівняння $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$ з початковою умовою $x^{(1)}$, де $\varphi(x^{(k)})$ – певна функція, яку треба визначити. Припустимо, що у деякий момент дискретного часу $t^{(m)}$ змінна $x^{(k)}$ набуває у встановленому режимі значення $x^{(k)} = x^{(m)}$, яке задовольняє нерівності (4). Для зупинки обчислювального процесу в момент $t^{(m)}$ визначимо умову, яка керує кількістю переможців і переможених у кожній дискретній часовій точці протягом обчислювального процесу. Для цього використаємо умову

$$R(x^{(k)}) = 2K - N - \sum_{n=1}^{N} \mathrm{sgn}(b_n^{(k)}), \tag{7}$$

де $R(x^{(k)})$ – k-те дискретне значення нев'язки; $b_n^{(k)} = c_n - x^{(k)}$ – значення n-го вихідного сигналу моделі на k-й ітерації

$$\mathrm{sgn}(b_n^{(k)}) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad b_n^{(k)} > 0; \\ 0, & \text{if} \quad b_n^{(k)} = 0; \\ -1, & \text{if} \quad b_n^{(k)} < 0 \end{cases} \tag{8}$$

– сигнум (жорсткообмежувальна)-функція; $\sum_{n=1}^{N} \mathrm{sgn}(b_n^{(k)})$ – різниця між дійсними кількостями переможців і переможених. Сигнум-функція виконує порівняння між k-м дискретним значенням n-го вихідного сигналу $b_n^{(k)}$ і нулем. Якщо $b_n^{(k)} > 0$, тоді n-на сигнум-функція забезпечує вихідний сигнал $\mathrm{sgn}(b_n^{(k)}) = 1$, якщо $b_n^{(k)} = 0$, тоді вихідний сигнал n-ї сигнум-функції $\mathrm{sgn}(b_n^{(k)}) = 0$, інакше $\mathrm{sgn}(b_n^{(k)}) = -1$.

Розглянемо форму функції $R(x^{(k)})$, наприклад, для вхідного вектора $a = (0.5, 0.3, 0.7, 0.9, 0.2, 0.8, 0.4, 0.1, 0.6)$, тобто для $N = 9$ вхідних сигналів і для $K = 1,4,5,8$ переможців, де $k = 1,2,...,500$, яка показана на рис. 1. Як можна побачити, $R(x^{(k)})$ – скалярна цілочислова ступінчата функція. Така функція набуває нульових значень, коли зсув x розміщується в діапазоні $0.8 < x < 0.9$ для $K = 1$, у діапазоні $0.5 < x < 0.6$ для $K = 4$, у діапазоні $0.4 < x < 0.5$ для $K = 5$ і у діапазоні $0.1 < x < 0.2$ для $K = 8$, що відповідає необхідним кількостям переможців згідно із заданими вхідними сигналами і рівностями (7). Рівність $R(x^{(k)}) = 0$ задовольняється щоразу, коли для кожного $K = 1,2,\ldots,N-1$ виконуються нерівності $c_{K+1} < x^{(k)} < c_K$.

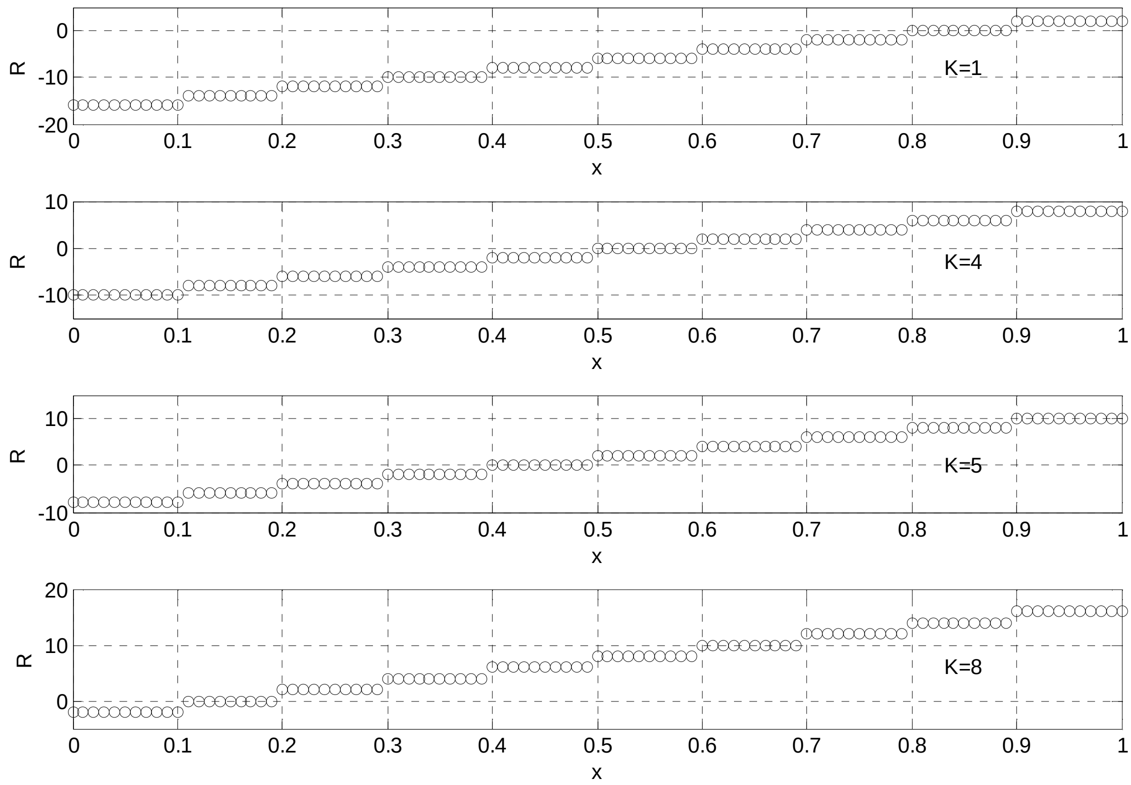

Рис. 1. Графіки функції $R(x^{(k)})$ *для* $N=9$ *вхідних сигналів і* $K=1,4,5,8$ *переможців*

Визначатимемо динамічний зсув $x^{(k)}$ за допомогою такого рекурсивного алгоритму:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - A\Delta x^{(k)}, \tag{9}$$

де $\Delta x^{(k)} = \mathrm{sgn}(R(x^{(k)}))\alpha^k$, α – параметр, який гарантує збіжність алгоритму до коректного розв'язку; $0 \le x^{(1)} \le A$ – початкова умова; m – кількість ітерацій до досягнення збіжності пошуковим процесом встановленого режиму. Опишемо математичну модель схеми різницевим рівнянням (9) і рівностями (6). Згідно з (9), якщо значення R(x) є меншим від нуля, тоді динамічний зсув $x^{(k)}$ повинен бути збільшений. Навпаки, якщо значення R(x) стає більшим від нуля, тоді $x^{(k)}$ повинен бути зменшений. У встановленому режимі, коли R(x) точно дорівнює нулю, $x^{(k)}$ не повинен змінюватись надалі. Для формування K переможців така модель повинна поступово забезпечувати необхідний зсув $x^{(k)}$, величина якого поступово наближається і зрештою потрапляє в інтервал між K-м і (K+1)-м максимальними значеннями сигналів c_n, тобто $c_{K+1} < x^{(k)} < c_K$. Коли значення зсуву $x^{(k)}$ потрапляє у діапазон між c_K і c_{K+1}, вихідні сигнали $b_n^{(k)}$ забезпечують існування KWTA-режиму.

4. Результати моделювання

Для ілюстрації теоретичних положень, поданих у статті, розглянемо конкретний приклад з відповідним комп'ютерним моделюванням, який демонструє обробку сигналів запропонованою моделлю KWTA-нейронної схеми обробки дискретизованих сигналів.

Приклад. Нехай необхідно ідентифікувати два найбільші сигнали ($K=2$) вектора $a=[-1,0.7,-0.3,-0.8,0.2]$, тобто $N=5$, використавши модель, що описується різницевим рівнянням (9) і рівностями (6). Задамо для такої моделі $A_{min}=-1$, $A=2$ початкову умову

$x^{(1)} = A$ і коефіцієнт загасання $\alpha = 0.7$. Визначимо траєкторії дискретного часу зсуву $x^{(k)}$ і вихідні сигнали $b_i^{(k)}, i = 1,2,3,4,5$ згідно з різницевим рівнянням (9) і рівностями (6). Отримані траєкторії в нормалізованих одиницях показано на рис. 2. Як видно, у встановленому режимі сигнали $b_2 > 0$, $b_5 > 0$ відповідають чотирьом найбільшим компонентам вектора a – переможцям, а сигнал $b_1 < 0$, $b_3 < 0$, $b_4 < 0$ відповідає переможеному згідно з KWTA-властивістю (2). Збіжність пошукового процесу до встановленого режиму досягається за $m = 6$ ітерацій.

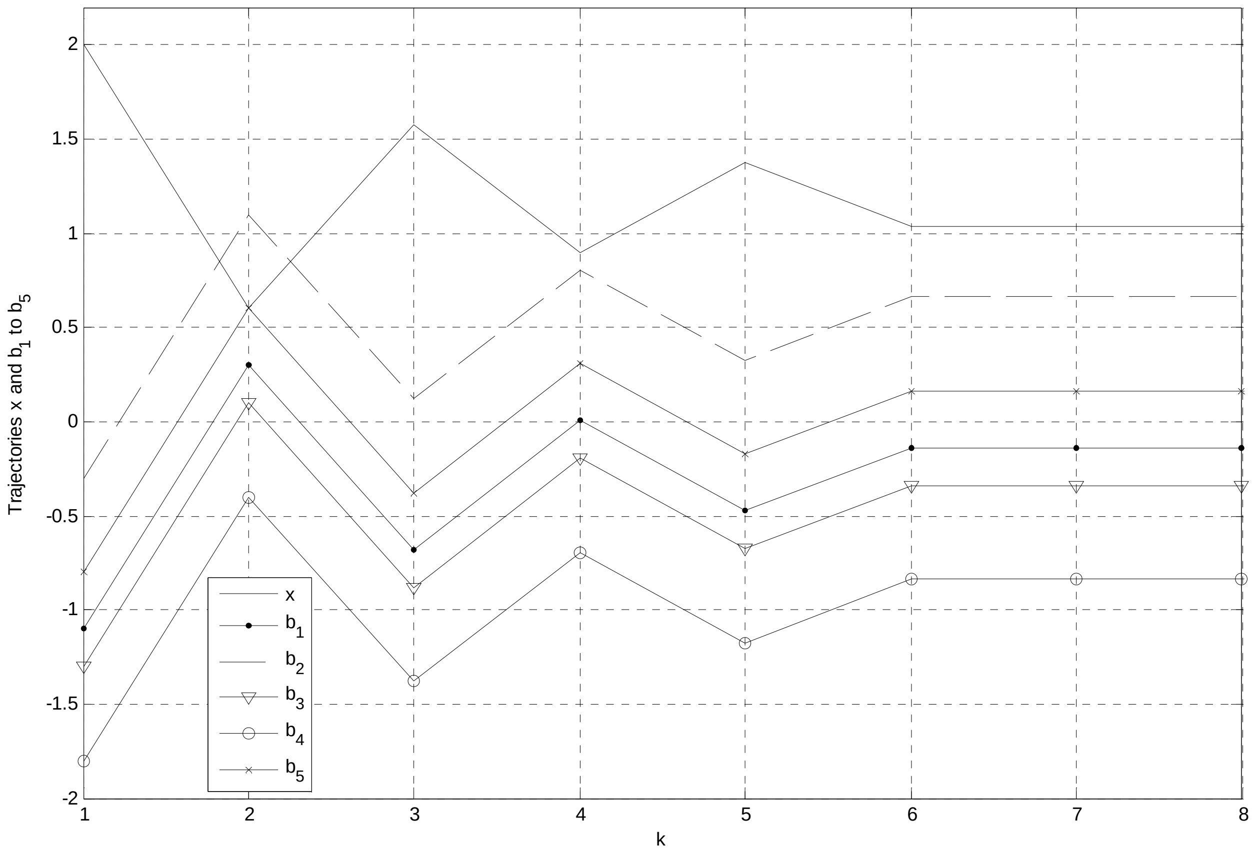

Рис. 2. Траєкторії дискретного часу зсуву $x^{(k)}$ *і вихідних сигналів* $b_i^{(k)}, i = 1,2,3,4,5$,
які відображають KWTA-властивість моделі, що описується різницевим рівнянням (9) і рівностями (6)

На рис. 3 подано фазовий портрет траєкторії дискретного часу зсуву $x^{(k)}$. Як можна побачити, фазова крива змінної $x^{(k)}$ є скінченною закрученою спіраллю кусково-лінійної форми, що гарантує стабільну траєкторію зсуву $x^{(k)}$. Зміна зсуву $\Delta x^{(k)} = x^{(k+!)} - x^{(k)}$ містить чотири стрибки між п'ятьма горизонтальними ділянками.

Отже, результати комп'ютерного моделювання показують, що запропонована модель KWTA-нейронної схеми може ефективно визначати K найбільших серед N невідомих сигналів, де $1 \le K < N$. Інакше кажучи, результати моделювання демонструють відповідність теоретичному прогнозу.

5. Висновки

У статті пропонується математична модель нейронної схеми типу "K-winners-take-all" обробки дискретизованих сигналів. Модель, побудована на основі динамічного зсування вхідних сигналів, придатна для обробки нерівних між собою сигналів з будь-якими скінченними значеннями. Результати комп'ютерного моделювання підтверджують наведені теоретичні положення.

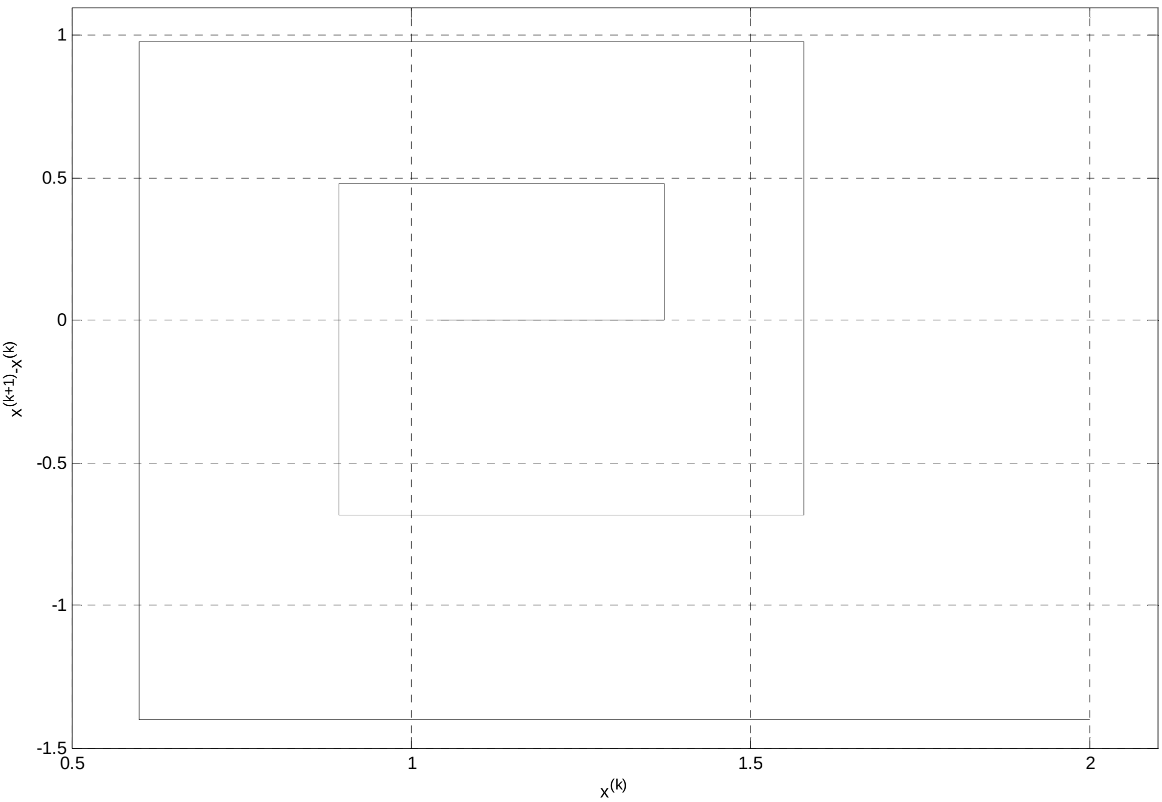

Рис. 3. Фазова крива траєкторії зсуву $x^{(k)}$.

1. Bihn L. N. and Chong , H. C. A neural-network contention controller for packet switching networks, IEEE Trans. on Neural Networks 6 (1995) 1402-1410. 2. Calvert B. D. and Marinov C.A. Another K *-winners-take-all analog neural network, IEEE Trans. on Neural Networks 4 (2000) 829-838. 3. Cichocki A. and Unbehauen R. Neural Networks for Optimization and Signal Processing (New York: John Wiley and Sons, 1993). 4. Hopfield J. J. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons, in: Proc. of Natl. Acad. of Sci. 81 (USA, 1984) 3088-3092. 5. Hu X. and Wang J. An improved dual neural network for solving a class of quadratic programming problems and its k-winners-take-all application, IEEE Trans. on Neural Networks, 19 (2008) 2022-2031. 6. Kwon T. M. and Zervakis M. A parallel sorting network without comparators: A neural-network approach, in: Proc. Int. Joint Conf. on Neural Networks, Vol. 1 (1992) 701-706. 7. Lippmann R. P., Gold B. and Malpass M.L. A comparison of Hamming and Hopfield neural nets for pattern classification, MIT Lincoln Laboratory Technical report TR-769 (1987) 1-37. 8. Liu S. and Wang J. A simplified dual neural network for quadratic programming with its KWTA application, IEEE Trans. on Neural Networks, 17 (2006) 1500-1510. 9. Majani E., Erlanson R. and Abu-Mostafa Y. On the* K *-winners-take-all network, in: Advances in Neural Information Process. Syst.. D. S. Touretzky, Vol. 1 (Kaufmann, San Mateo, 1989) 634-642. 10. Marinov C. A. and Calvert B. D. Performance analysis for a* K *-winners-take-all analog neural network: basic theory, IEEE Trans. on Neural Networks 14 (2003) 766-780. 11. Perfetti R. On the robust design of k-winners-take-all networks, IEEE Trans. on Cir. and Syst.-II: Analog and Digit. Sign. Process., CAS-42 (1995) 55-58. 12. Tymoshchuk P. and Kaszkurewicz E. A Winner-take-all circuit based on second order Hopfield neural networks as building blocks, in: Proc. Int. Joint Conf. on Neural Networks, Vol. II (2003) 891-896. 13. Tymoshchuk P. and Kaszkurewicz E. A winner-take-all circuit using neural networks as building blocks, Neurocomputing 64 (2005) 375-396. 14. Urahama K. and Nagao T. K-Winner-take-all circuit with 0(n) complexity, IEEE Trans. on Neural Networks 6 (1995) 776-778. 15. Wolfe W. J., Mathis D., Anderson C., Rothman J., Gotler M., Bragy G., Walker R., Duane G. and Alaghband G. K-Winner networks, IEEE Trans. on Neural Networks 2 (1991) 310-315. 16. Yang J. F. and Chen C. M. A Dynamic K-Winners-Take-All Neural Network, IEEE Trans. on Syst., Man and Cyb. 27 (1997) 523~526. 17. Yen J. C. and Chang S., A new first-* k *-winners neural network, in: Proc. of the ISANN (1997) D-01-D-06. 8. Yen J. C., Guo J. I. and Chen H.-C. A new* k *-Winners-take all neural network and its array architecture, IEEE Trans. on Neural Networks 9 (1998) 901-912.*