теории игр: Бескоалиционные игры. – М.: Наука, 1984. 13. Невельсон М.Б., Хасьминский Р.З. Стохастическая оптимизация и рекуррентное оценивание. – М.: Наука, 1972. 14. Кравець П.О. Ігрова самоорганізація системи агентів з індивідуальним оцінюванням стратегій // Комп'ютерні системи та мережі: Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2005. – № 546. – С. 75 – 85.

УДК 004.421.2:517.443

І.О. Процько
Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра систем автоматизованого проектування

ПІДХІД ЕФЕКТИВНОГО ОБЧИСЛЕННЯ ДИСКРЕТНИХ ГАРМОНІЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ЧЕРЕЗ ЦИКЛІЧНІ ЗГОРТКИ

Розглянуто ефективне обчислення дискретних гармонічних перетворень. Обчислювальний алгоритм визначається за сформованою структурою дискретної базисної матриці. Симетричні циклічні згортки є основою ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень.

The efficient computation of discrete harmonic transforms is introduced. The algorithm of computation are determined the formed structure of discrete basis matrix. The symmetrical cyclic convolutions are fundamental of algorithm for efficient computation discrete harmonic transform.

Вступ

У багатьох прикладних задачах для ефективного дослідження та аналізу систем сигнали складної форми зображають лінійним перетворенням елементарних (базисних) функцій. Під час проходження у системі неперервні сигнали складної форми зображають у вигляді зваженої суми базисних функцій

$$U(t) = \sum_k C_k \phi(t)_k , t \in [t_1, t_2] . \quad (1)$$

Отже, за вибраного базису сигнал U(t) повністю задається коефіцієнтами C_k. Таку сукупність чисел називають дискретним спектром сигналу. Спектри є зручною аналітичною формою зображення сигналів. Такий підхід на основі базисного набору особливо продуктивний для аналізу лінійних інваріантних до зсуву систем. Історично склалось, що співвідношення (1) називають узагальненим рядом Фур'є, а коефіцієнти C_k – узагальненими коефіцієнтами Фур'є. Адже вперше для визначення C_k – на основі властивості ортогональності було застосовано при розкладі в ряд Фур'є. Визначення спектральних складових значно легше обчислюється в ортогональних базисах. Повні системи ортогональних функцій забезпечують як завгодно малу різницю між неперервною функцією та її рядом за необмеженого збільшення кількості його членів.

Іншим застосуванням перетворень для класу дискретних лінійних систем є визначення співвідношення між її входом *X* та виходом *Y*, що задається у вигляді згортки

$$Y[n] = \sum_k x[k] * h[n-k], k \in [-\infty, \infty] , \quad (2)$$

де h (n) – відклик системи на одиничний вхідний сигнал.

Одним з найуспішніших застосувань дискретних перетворень стало їхнє використання для ефективного обчислення згортки. Адже операції згортки в часовій області відповідає операція множення в області визначення базису перетворення [1].

Широке визнання отримали зображення детермінованих сигналів експоненціальними базисними функціями (перетворення Фур'є, перетворення Лапласа). Перехід від експоненціальних базисних функцій через формули Ейлера зображає складний детермінований сигнал у вигляді суми гармонічних складових (cos ωt, sin ωt). Параметр ω відновідає круговій частоті, тому результат гармонічного перетворення часто називають частотною формою зображення сигналу. Для подання особливо дійсних даних, в їхній гармонічний спектральний образ поряд з швидким перетворенням Фур'є використовується дискретне косинусне перетворення, дискретне перетворення Хартлі.

Сучасний розвиток інформаційних технологій використовує зображення дискретних даних через дискретні гармонічні перетворення не тільки при моделюванні систем та спектральному, кореляційному, кепстральному аналізах, але у різноманітних технологіях цифрової обробки (кодуванні, розпізнаванні та відтворенні) даних.

Ефективне обчислення коефіцієнтів перетворення вимагає досконалих алгоритмічних підходів з організації та реалізації обчислювального процесу, що реалізується на основі програмно-апаратних або апаратно-орієнтованих засобів. Тому є актуальним дослідження і розвиток загальних підходів ефективного обчислення дискретних перетворень послідовностей довільного обсягу, що дасть можливість проектувати універсальні інструменти спектрального подання інформації.

Постановка проблеми

Для подання даних в їх спектральний гармонічний образ застосовуються перетворення класу Фур'є з використанням ефективних алгоритмічних підходів. Розклад сигналів на гармонічні складові ведеться здебільшого з використанням рівномірно розміщених на одиничному колі базисних гармонічних функцій з аргументами, що визначають дискретні значення послідовності результату обробки, при загальній кількості вхідних і вихідних значень N. Найпоширеніші швидкі алгоритми гармонічних перетворень для сталого значення N вхідного обсягу сигналів, особливо таких, що дорівнюють $N=2^n$ (n=2,3,…,k), що і визначало параметри створюваних інформаційних засобів. При одержанні вхідного масиву іншого обсягу ці алгоритми зі сталим значенням N вхідного обсягу сигналів або такого, що дорівнює $N=2^n$, вимагали доповнення нульовими значеннями вхідної послідовності або зміни частоти дискретизації вхідного сигналу. Розвиток сучасних засобів на базі інформаційних технологій ставить вищі вимоги щодо функціональної можливості перед алгоритмічними та на їхній основі програмно-апаратними засобами, враховуючи вибір відповідної величини роздільної здатності, що визначається ефективним інтервалом концентрації інформаційної енергії.

Аналіз останніх досліджень показав, що одержано різноманітні форми узагальненого опису як косинусних, так і інших перетворень класу Фур'є [2]. Відомі підходи мають як переваги, так і особливості, що полягають в специфічній складності визначення обчислювальних алгоритмів для певних значень обсягів. Адже програмна реалізація цих підходів вимагає створення уточнюючих алгоритмів на конкретних етапах виконання дискретних перетворень для змінних обсягів вхідних послідовностей. Розширення функціональних можливостей алгоритмів дискретних гармонічних перетворень програмних або апаратних засобів забезпечується передовсім здійсненням обчислень для змінних обсягів вхідних послідовностей. Це потребує при широкій реалізації в різноманітних обчислювальних системах єдиного підходу в схемі обчислень для різних меж перетворення.

Розроблення узагальненої схеми ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень вимагає аналізування особливостей базису перетворення на основі періодичності та симетрії гармонік, що є елементами базису; формування матриці аргументів базису за твірним масивом, що визначає структури матриць аргументів базису і відповідні еквівалентно-структурні матриці знаків перетворення послідовностей довільного обсягу; виділення підмножин значень обсягів, що мають типові блочно-матричні структури.

Твірний масив базисної матриці

Дискретне гармонічне перетворення у матричній формі:

$$X = W^* x, \qquad (3)$$

де W(kxn) – квадратна базисна матриця: (n,k=0,(1),...,N-1), x(N) and X(N) – матриці-стовпці вхідних та вихідних даних. Гармонічний базис у частотній формі може задаватись:

$W(k,n)=\exp(-j2\pi kn/NT)$, (дикретне перетворення Фур'є, DFT);

$W(k,n)=cas(2\pi kr/NT)=(\cos(2\pi kn/NT)+\sin(2\pi kn/NT))$, (дикретне перетворення Хартлі, DHT);

$W(k,n)= c(n)\, x(n)\cos[\pi(2k+1)n/2NT]$, (дикретне косинусне перетворення, DCT),

де $c(n) = \begin{cases} 2^{-1/2}, & \text{якщо } n=0 ; \\ 1, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$

N – обсяг перетворення; T – час дискретизації.

Запропонований підхід для ефективного обчислення дискретних гармонічних перетворень, що ґрунтуються на декомпозиції базисної гармонічної функції, розглянуто в роботах [3, 4, 5].

У результаті аналізу структуру базисної матриці можна задати твірним масивом

$$P(n)=P(n_1)\, P(n_2) \dots P(n_k), \qquad (4)$$

де k – кількість підматриць, n – обсяг масиву для різних представлень визначається:

n={N/2}-1 косинусна частина DFT;

n=N-1 синусна частина DFT;

n=2N-1 для DCT.

Кількість k підматриць P(n) визначається значенням N (просте, складене) обсягу перетворення.

Твірний масив P(n) об'єднує підмасиви

$$\begin{aligned} P(n_1) &=(n_{11}, n_{12}, n_{13, \dots,} n_{1L1}), \\ P(n_2) &=(n_{21}, n_{22}, n_{23,\dots,} n_{2L2}), \\ \dots, P(n_k) &=(n_{kL1}, n_{kL2}, \dots, n_{kLk}), \end{aligned} \qquad (5)$$

де n_{ij} – елемент підмасиву, Li – кількість елементів в підмасиві $P(n_i)$.

Приклади твірних масивів для обсягу перетворення N=7

P(3)= (1, 2, 3) косинусна частина DFT;

P(6)= (1,2,4)(6,5,3) синусна частина DFT;

P(13)= (1,3,9)(13,11,5) (0) (2,6,10) (12,8,4) DCT,

або для парного обсягу перетворення N=14

P(6)=(1,3,5)(2,6,4)(7) of cosine part for DFT;

P(13)= (1,3,9,13,11,5)(2,6,4,12,8,10) of sine part for DFT;

P(27)=(1,3,9,27,25,19)(5,15,11,23,13,17)(7,21)(0) (2,6,18)(4,12,20)(24,16,8)(26, 22,10) of DCT.

P(n) задає послідовність елементів вхідних даних при обчисленні дискретного гармонічного перетворення.

Якщо DCT для N=8

P(15)=(1,3,9,5,15,13,7,11)(2,6,14,10)(4, 12)(0)

Переупорядкування вхідної послідовності:

x(1), x(3), -x(7), x(5), -x(1), -x(3), x(7), -x(5), x(2), x(6), -x(2), -x(6), x(4), -x(4), x(0).

Спрощений твірний масив доповнений масивом знаків

Властивості симетрії та періодичності базису гармонічного перетворення приводять до ефективнішого подання меншими значеннями елементів твірних підмасивів P'(n) з доповненнями відповідних підмасивів знаків Z(n). Підматриці знаків Z(n) містять значення елементів, що дорівнюють +1,-1,0.

Приклади спрощених твірних масивів і відповідних матриць знаків для обсягу перетворення N=7

P'(3)= (1, 2, 3) and Z(3)=(+ - -) косинусна частина DFT ;

P'(6)= (1,2,3)(1,2,3)

Z(6)=(+ + - - - +) синусна частина DFT;

P'(13)= (1 3 5 1 3 5) (0) (2 6 4 2 6 4)

Z(13)= (+ + - - - +) (1) (+ + - - - +) DCT,

або для парного обсягу перетворення N=14

P(6)= (1,3,5)(2,6,4)(7) Z(6)=(+ + -)(+ - -)(-) косинусна частина DFT;

P(13)=(1,3,5,1,3,5)(2,6,4,2,6,4)

Z(13)= (+ + - - - +) (+ + + - - -) синусна частина DFT;

P(27)=(1,3,9,1,3,9)(5,13,11,5,13,11)(7,7)(0)(2,6,10)(4,12,8)(4,12,8)(2,6,10)

Z(27)= (+ + + - - -)(+ - + - + -) (+ -)(+)(+ + -)(+ + -) (- - +)(- - +) DCT.

Спрощений твірний масив P'(n) візначає особливість структури квадратної базисної матриці W(kxn) за кожним конкретним обсягом перетворень N. Деякі з підматриць в базисній матриці W починаються з проміжних елементів у твірних підмасивах $P(n_k)$. Підмасиви твірного масиву P(n) формують Ганкелеві циклічні підматриці у базисній квадратній матриці W, що веде до обчислення циклічних згорток для значень базису з аргументами Z(n)P(n) та вхідних даних.

Аналіз структур базисних матриць

Аналіз структури базисних матриць визначає особливості обчислювального алгоритму. Кількість підматриць у базисній матриці є $m \geq k^2$ (k – кількість твірних підмасивів P(z)). Для синтезу обчислювального алгоритму аналізуються координати циклічних підматриць та кількість повторень за їхнім початковим елементом у структурі базисної матриці. Для цього визначаються координати i,j та перший елемент підматриці, який порівнюється з першим елементом твірного масиву $P'(n_k)$ у структурі базисного масиву W. Якщо однакові підматриці розміщені по вертикалі в базисній матриці, то обчислюється одна циклічна згортка. Це зменшує кількість циклічних згорток в обчислювальному алгоритмі дискретних гармонічних перетворень.

Наприклад, структура матриці гармонічного перетворення косинусної частини DFT для обсягу N=51, P(24)= (1,2, 4, 8, 16, 19, 13, 25) (3, 6, 12, 24) (5, 10, 20, 11, 22, 7, 14, 23) (9 18 15 21), показана на рис. 1.

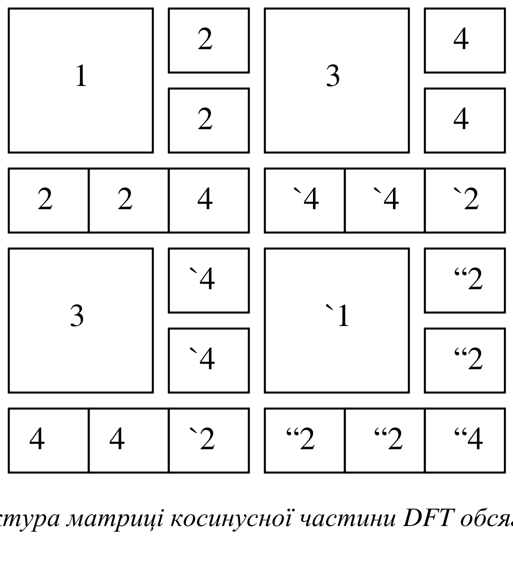
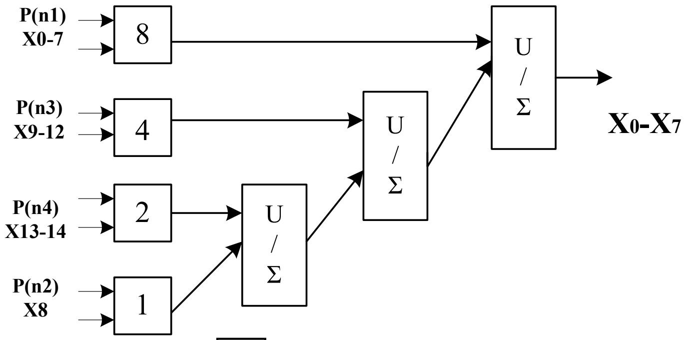


Рис. 1. Структура матриці косинусної частини DFT обсягу N=51

Початковим етапом обчислення DHT є попереднє об’єднання вхідних даних відповідно до значень твірних підмасивів у P(n). Незалежне обчислення циклічних згорток використовує ефективні алгоритми швидких згорток [6, 7]. Вихідні дані перетворення є результатом об’єднання проміжних вихідних значень циклічних згорток відповідно до обчислювальної моделі (рис. 2).



p (точкова) циклічна згортка -
векторна сума результатів згортки -

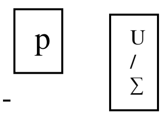


Рис. 2. Обчислювальна модель DCT для обсягу перетворень N=8

За обчислювальною моделлю визначається оптимальна послідовно-паралельна послідовність виконання циклічних згорток та об’єднання їхніх результатів під час обчислення дискретного гармонічного перетворення.

Висновки

Запропонований узагальнений алгоритм обчислень гармонічних перетворень при переході у частотний вимір для обчислення використовує особливості подання часового виміру і охоплює різні обсяги перетворень. Застосування цього дискретного гармонічного перетворення потребує ефективного програмного забезпечення обчислення швидких згорток та апратних засобів. Найбільший ефект за кількістю операцій досягається за невеликих або складених значень обсягів перетворення. Іншими перевагами є гнучкість в послідовності виконання циклічних згорток, можливість розпаралелювання, можливість реалізації в різноманітних обчислювальних структурах. Особливо актуальність запропонованого підходу знаходить подальший розвиток в розподілених паралельних системах, де багато ефективних алгоритмів гармонічних перетворень можуть впроваджуватись у кодуванні, розпізнаванні образів, стисненні даних, адаптивній інтерполяції сигналів, що адаптуються, до змінного обсягу перетворень.

1. Макклеллан Дж. Х., Рейдер Ч. М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1983. 2. S. Lawrence Marple, Jr., Digital spectral analysis with applications, NJPrentice-Hall, 1987. 3. Процько І.О. Підхід ефективного обчислення дискретного перетворення Хартлі // Комп'ютерні системи проектування. Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. № 502, 2005. 4. Процько І.О. Розробка схеми узагальненого ефективного алгоритму гармонічного перетворення даних // Інформаційні системи та мережі. Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. № 549, 2005. С.157–164. 5. Процько І.О. Ефективне обчислення дискретних косинусних перетворень / Комп'ютерні системи проектування. Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. № 591, 2007. – С.58–63. 6. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений / Под ред. Т.С. Хуанга. – М.: Радио и связь, 1984. 7. Власенко В.А., Лаппа Ю.М., Ярославский Л.П. Методы синтеза быстрых алгоритмов свертки и спектрального анализа сигналов. – М.: Наука, 1990.