

ЕФЕКТИВНІ МЕТОДИ АПРОКСИМАЦІЇ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ ОСІДАНЬ ІНЖЕНЕРНИХ СПОРУД

Мета досліджень. Удосконалення методів апроксимації осідань експоненціальною, дрібнораціональною, поліноміальною та синусоїдними функціями з визначенням інтервалів між циклами спостережень. Методика і результати роботи. Розглядаються методи апроксимації і прогнозування осідань контрольних реперів і марок споруд. Особливу увагу приділено експоненціальній функції з використанням простого і точного способу визначення коефіцієнта інтенсивності осідання за середніми значеннями самих осідань і часових інтервалів, який дозволяє суттєво зменшити обсяг ітераційних обчислень. Запропонований у статті точний (інтегральний) метод визначення коефіцієнта інтенсивності осідання дозволяє практично вилучити ітераційний процес обчислень і за даними апроксимації осідань уточнювати коефіцієнти стискування або пористості ґрунту, які визначаються із лабораторних досліджень ґрунту. Для заміни методів поліному і синусоїди розроблено алгоритм апроксимації осідань методом дрібнораціональної функції, запропонованим В. В. Зіборовим [Зіборов, 1972], та методику визначення міжциклових часових інтервалів для виконання раціональних моніторингових спостережень за вертикальними зміщеннями споруд. Показано ефективність застосування методу дрібнораціональної функції та практичну недоцільність використання функції поліному та синусоїди для апроксимації осідань. Доведено, що запропонований В. В. Зіборовим метод дрібнораціональної функції є найпростішим в організації обчислень. Наукова новизна. Виконані удосконалення підвищують ефективність і репрезентативність даних апроксимації, сприяють зменшенню обсягу обчислень. Практична цінність. Розроблення методики розрахунку часових інтервалів між циклами спостережень для різних функцій апроксимації дозволяє практично вилучити ітераційний процес визначення коефіцієнта інтенсивності осідання для експоненти та використання цього коефіцієнта для уточнення коефіцієнтів стисливості або пористості ґрунту, які визначаються за його лабораторними дослідженнями.

Ключові слова: моніторинг, осідання, апроксимація, експонента, дрібно-раціональна функція, поліном, синусоїда, міжцикловий інтервал спостережень.

Вступ

Моніторинг інженерних споруд, особливо висотних унікальних і екологічно небезпечних, вимагає використання ефективних і точних методів апроксимації осідань контрольних марок і реперів. У практиці для апроксимації і прогнозування осідань найбільшого поширення отримали методи експоненціальної, поліноміальних і синусоїдальних функцій. Перший найбільш ефективний для повільно просідальної товщі ґрунту і набув широкого застосування з використанням фізико-технічних характеристик ґрунту, отриманих під час інженерно-геологічних досліджень.

Аналіз останніх досліджень. Внаслідок того, що апроксимація осідань ведеться за наближеними розрахунковими параметрами експоненти [Видуев, 1972; Зіборов, 1972] і частково [Баран, 2012], то сходиність ітераційного процесу залежить від того, наскільки близькими були обрані початкові значення параметрів апроксимації. Тому, з метою удосконалення методу апроксимації експоненціальною функцією постало питання перегляду методики визначення коефіцієнта інтенсивності осідання та його використання для уточнення фізико-механічних характеристик ґрунту (стисливості або пористості) за даними апроксимації осідань, тобто інтегральних показників реального осідального процесу. Саме цим апроксимація осідань експоненціальною функцією суттєво відрізняється від полінома і синусоїди, які при складності обчислювального процесу дозволяють тільки апроксимувати осідання, що знижує їх ефективність.

Мета

Метою досліджень є удосконалення методів апроксимації осідань експоненціальною, дрібнораціональною, поліноміальною та синусоїдними функціями з визначенням інтервалів між циклами спостережень

Методика і результати роботи

Визначення параметрів гіпотетичної моделі, точності і частоти вимірювання осідань.

Згідно з чинним ДСТУ-Б В.2.1-30: 2014 [ДСТУ Б В.2.1-30:2014 Ґрунти. Методи вимірювання деформацій основ будинків і споруд] допустима середня квадратична похибка вимірювання осідання не має перевищувати 1,2,5 і 10 мм відповідно для споруд, зведених на скельних, ущільнювальних, насипних і заторфованих ґрунтах, а також для земляних споруд. Тому, будь-які геодезичні роботи, зокрема й моніторингові спостереження, починають з розрахунку необхідної точності вимірювань. Складність розрахунків полягає в тому, що до початку спостережень треба правильно вибрати так звану гіпотетичну (передбачувану) математичну модель, за якою може відбуватися процес осідання даної споруди.

У практиці найбільше поширена модель, що описується експоненціальною функцією

$$S_t = S_k(1 - e^{-kt}), \quad (1)$$

де S_t – прогнозоване осідання за час t , S_k – розрахункове кінцеве осідання споруди, k – коефіцієнт інтенсивності осідання.

Для розрахунку можливого осідання об'єкта будівництва за розмірами будинку та його висотою визначають масу M споруди та її приведений тиск P на ґрунт, щоби згідно з курсом механіки ґрунтів обчислити дві характеристики осідального процесу за формулами

$$S_k \approx \frac{hm_0P}{1 + \varepsilon}; \quad P = \frac{V\gamma_m}{F}; \quad k \approx \frac{10^5 \sqrt{m_0}}{th}, \quad (2)$$

де S_k, h – кінцеве осідання споруди і потужність просідальної товщі ґрунту (глибина підшови фундаменту), м; m_0 – коефіцієнт стисливості ґрунту, який змінюється в межах 0,05-0,50) · 10⁻⁶ м²/н (1 ньютон = 9,8 кг) відповідно для піску і глини; ε – коефіцієнт пористості ґрунту (безрозмірний), який береться рівним 0,55; 0,60; 0,80 відповідно для щільних, середньощільних і пухких ґрунтів; t – часовий період, міс. або рік; P – тиск на ґрунт (маса споруди) на рівні підшови фундаменту, н/м²; V – об'єм будівельних конструкцій (фундаментів, плит перекриття, стін, перегородок, покрівля та ін.), м³; γ_m – щільність (об'ємна маса) бетону або сталі, яка становить відповідно 1600 і 7800 кг/м³ (або 16000 і 78000 н/м³); F – площа ґрунту під спорудою, м².

Якщо будинок чи окрема секція розміром 18×14 м займає площу 252 м² і об'єм залізобетонних конструкцій становить 400 м³, то при $h = 20$ м; $m_0 = 0,05 \cdot 10^{-6}$ і $\varepsilon = 0,60$ тиск на ґрунт $P \approx \frac{400 \cdot 16000}{252} \approx 0,024 \cdot 10^6$ н/м². Тоді кінцеве осідання будинку і коефіцієнт інтенсивності осідання за період $t = 12$ місяців будуть:

$$S_k \approx \frac{20 \cdot 0,05 \cdot 10^{-6} \cdot 0,024}{(1 + 0,60)252} \approx 0,016 \text{ м}; \quad k \approx \frac{10^5 \cdot 10^{-3} \sqrt{0,05}}{12 \cdot 20} \approx 0,093 / \text{міс}.$$

Як буде показано нижче, за цими величинами можна підрахувати, що стабілізація такого осідання може наступити не менше, ніж через 60 міс., коли $S_k \approx 0,016(1 - e^{-0,093 \cdot 60}) \approx 0,016$ м. За визначеними параметрами розраховують кінцеве осідання S_k , поточні значення осідань S_t в інтервалі $\Delta t = t_k - t_0$ від початку спостережень до стабілізації осідального процесу.

Для організації нівелювання контрольних реперів або марок, закладених в цоколі зведеної споруди, необхідно встановити інтервали контролю Δt і Δs , за якими визначається швидкість осідання споруди, яка істотно залежить від складу ґрунту (найменше на скельних та глинистих і більше – на піщаних та особливо на лесових (пористих) ґрунтах).

Швидкість осідання визначається за приростами Δs і Δt згідно з формулою

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (3)$$

звідки легко визначити відносну похибку швидкості осідання

$$\frac{m_v}{v} = \sqrt{\left(\frac{m_{\Delta s}}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{m_{\Delta t}}{\Delta t}\right)^2}. \quad (4)$$

Скориставшись принципом однакового впливу похибок двох складових процесу вимірювань, запишемо вирази для допустимих похибок вимірювання різниць осідання та часового інтервалу

$$m_{\Delta s} \leq \frac{m_v \Delta s}{v\sqrt{2}}; \quad m_{\Delta t} \leq \frac{m_v \Delta t}{v\sqrt{2}}, \quad (5)$$

де $\frac{m_v}{v}$ – відносна похибка визначення швидкості осідання, яка переважно береться рівною 1/10, або 10 % від значення швидкості осідання.

Оскільки в початковий період експлуатації споруд їх осідання активно зростають, а після ущільнення ґрунту вони поступово зменшуються, то часовий інтервал між циклами спостережень доцільно обирати з неоднаковою різницею Δt , взявши для розрахунку постійну зміну осідання між циклами $\Delta s = S_k / n$, де n – прийнята кількість робочих циклів спостережень, наприклад, при чотирьох річних циклах впродовж 3-х років величина $n=12$, коли при $S_k = 84$ мм, міжциклове осідання береться однаковим $\Delta s = 7$ мм. Далі методом інтерполяції можна обчислити величини можливих осідань

$$S_{t_i} = S_{t_0} + i \cdot \Delta s, \quad (6)$$

де $S_{t_0} = 0$ – осідання контрольного репера в 0-му (початковому) циклі спостережень, оскільки його висотна позначка H_0 береться вихідною для визначення осідання репера за відомою залежністю $\Delta S_i = H_i - H_0$ у всіх наступних циклах $i = 1, 2, 3, \dots, n$, але потреби в цьому немає, тому, що часовий інтервал від початку спостережень до будь-якого робочого циклу можна визначити з формули (1) за такою залежністю

$$t_i = -\frac{\ln(1-r_i)}{k} = -\frac{\ln(1-i/n)}{k}; \quad r = \frac{S_i}{S_k} = \frac{i}{n}. \quad (7)$$

В стадії стабілізації осідань внаслідок наближення сусідніх значень осідань до S_k функція логарифма у формулі (7) вироджується, тому у чисельнику треба брати значення $\ln[(1-1/n)/2]$, яке в даному прикладі дорівнює $\ln(0,0,625) = -2,77$ і $t_8 \approx -2,772 / -0,058 \approx 47,8$ міс.

Для наглядності планування міжциклових часових інтервалів доцільно скласти графік осідань, відкладаючи значення t_i з інтервалом 1 міс. – через 5 мм на горизонтальній осі абсцис, а S_{t_i} – на вертикальній осі ординат – вниз (осідання мають знак мінус) у масштабі 1:1, 1:2, 1:5 або 1:10 залежно від точності нівелювання. Перші два масштаби переважно застосовують при нівелюванні I-II, а інші – III-IV класів. Після цього на графіку розмічають зони розміщення ΔS_i і графічно контролюють раціональні часові інтервали t_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) між циклами спостережень.

Для контролю часових інтервалів між двома сусідніми циклами можна використати формулу

$$\Delta t_{i,i+1} = t_{i+1} - t_i = -\frac{1}{k} \ln \frac{S_k - S_{t_{i+1}}}{S_k - S_{t_i}}. \quad (8)$$

Якщо $S_{t_1} = 9,5$ мм, $S_{t_2} = 19$ мм і $k = 0,058$ міс., то $\Delta t_{12} = 2,66$ міс., що узгоджується з даними табл. 1. Тоді, згідно з формулою (5), допустима похибка дотримання цього інтервалу між циклами геодезичних вимірювань не має перевищувати $m_{\Delta t} = \pm 2,66 / 7.1 = \pm 0,37$ міс. = ± 11 днів.

**Обчислення раціональних міжциклових часових інтервалів
вимірювання осідань**

$$(S_k = 76 \text{ мм}; t_k = 48 \text{ міс.}; n = 8; \Delta S_1 = 9,5 \text{ мм}; k = 0,058)$$

№ цикла	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
ΔS_i , мм	9,5	9,5	9,5	9,5	9,5	9,5	9,5	9,5	0,2	-
S_{t_i} , мм	0	9,5	19,0	28,5	38,0	47,5	57,0	66,5	76,0	
t_i , міс.	0	2,3	5,0	8,1	12,0	16,9	23,9	35,8	48	
$\Delta t_{i,i+1}$, міс.	-	2,3	2,7	3,1	3,8	5,0	7,0	12,0	12,2	-
$m_{\Delta t_{i,i+1}}$, день	-	10	11	13	16	21	30	51	52	-

Методи апроксимації осідань

Апроксимація осідань експонентою. Осідання контрольного репера обчислюється як різниця двох висотних позначок H_{i-1} і H_i , отриманих у суміжних циклах за формулою

$$S_{t_i} = H_i - H_{i-1}, \quad (9)$$

які отримують із геометричного або тригонометричного нівелювання [Баран, 1997].

З цієї формули виходить, що в нормальних умовах будівництва та експлуатації споруд осідання має знак “мінус”, який автоматично враховується в алгоритмах і програмах комп’ютерного опрацювання даних та комп’ютерної графіки. Проте, у практиці цей знак часто пропускають, так як слово “осідання” розуміється як пониження висоти точки земної поверхні, що відображається на профілях і графіках осідання контрольних реперів.

Апроксимоване осідання $S_{t_i}^a$ на повільно стискуваних ґрунтах теоретично описується експонентою (1) і разом із виміряним осіданням формує рівняння поправок

$$S_{t_i}^a - S_{t_i} = v_i \quad (10)$$

де v_i – поправка у виміряне осідання,

Апроксимація осідань експонентою вимагає приведення рівняння поправок (10) до лінійної форми (лінеаризації), оскільки теоретичне значення осідання $S_{t_i}^a$ описується нелінійною функцією (1). Для лінеаризації таких функцій використовується її розклад у ряд Тейлора, обмежуючись першими членами розкладу, тобто зводячи теоретичне значення осідання до такого вигляду:

$$\begin{aligned}
 S_{t_i}^a &= S_{t_i}^0 + \left(\frac{dS_{t_i}}{dS_k} \right)^0 \Delta S_k + \left(\frac{dS_{t_i}}{dk} \right)^0 \Delta k; \\
 S_{t_i}^0 &= S_k^0 (1 - e^{-k_0 t_i}); \quad \left(\frac{dS_{t_i}}{dS_k} \right)^0 = 1 - e^{-k_0 t_i} = a_i; \\
 \left(\frac{dS_{t_i}}{dk} \right)^0 &= S_{k_0} t_i e^{-k_0 t_i} = S_{k_0} t_i (1 - a_i) = b_i; \\
 \Delta S_k &= S_k - S_{k_0}; \quad \Delta k = k - k_0.
 \end{aligned} \quad (11)$$

Обчислення цих елементів рівнянь поправок ведеться за наближеними значеннями кінцевого осідання S_k^0 і k_0 . Але якщо S_k^0 визначається точніше за двома останніми значеннями виміряних осідань, особливо в стадії їх затухання, то для визначення k_0 нижче наведено точну формулу [Баран, 2012]

$$k_0 = -\frac{1}{\bar{t}} \ln\left(1 - \frac{\bar{S}}{S_k^0}\right), \quad (12)$$

де $\bar{t} = [t]/n$ і $\bar{S} = [S]/n$ – середні значення часового інтервалу і осідання, які сприяють зменшенню кількості ітерацій розв’язування задачі.

Зауважимо, що формула (12) надійно працює й у початковій стадії осідального процесу.

Тоді рівняння поправок (10) із врахуванням (11) для n вимірювань будуть такими:

$$a_i \cdot \Delta S_k + b_i \cdot \Delta k_i + l_i = v_i; \quad l_i = S_{t_i}^0 - S_{t_i}, \quad (13)$$

де l_i – вільний член рівняння, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ – номер спостереження.

Склавши і розв’язавши два нормальних рівняння

$$\begin{aligned} [aa]\Delta S_k + [ab]\Delta k + [al] &= 0; \\ [ab]\Delta S_k + [bb]\Delta k + [bl] &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

отримаємо шукані невідомі

$$S_k = S_k^0 + \Delta S_k; \quad k = k^0 + \Delta k, \quad (15)$$

за якими згідно з формулою (1) експоненти можна обчислити остаточні значення апроксимованих осідань $S_{t_i}^a$, а потім й величини поправок v_i , сума яких теоретично за умовою МНК має дорівнювати нулеві, тобто

$$[v] \approx [S^a] - [S] \approx 0, \quad (16)$$

що служить контролем правильності розв’язування задачі.

За результатами обчислень апроксимовані осідання $S_{t_i}^a$ наносять точками на графік, з’єднують їх плавною лінією та контролюють правильність відображення лінії апроксимації стосовно ламаної лінії вимірних осідань S_{t_i} , які повинні збігатися в межах максимального відхилення $\Delta v \leq 3\mu$.

Похибки визначення параметрів апроксимації обчислюють за формулами

$$\begin{aligned} \mu &= \sqrt{\frac{[v^2]}{n-2}}; \quad m_{S_k} = \mu \sqrt{Q_{11}}; \quad m_k = \mu \sqrt{Q_{22}}; \quad Q_{11} = \frac{[bb]}{D}; \\ Q_{22} &= \frac{[aa]}{D}; \quad D = [aa] \cdot [bb] - [ab]^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Якщо виникає потреба оцінки точності апроксимованого осідання у будь-якому циклі спостережень, то похибка

$$m_{S_{t_i}^a} = \mu / \sqrt{P_{S_{t_i}^a}}; \quad P_{S_{t_i}^a} = a_i^2 Q_{11} + b_i^2 Q_{22} + 2a_i b_i Q_{12}; \quad Q_{12} = -\frac{[ab]}{[aa]} Q_{22}, \quad (18)$$

де a_i, b_i – коефіцієнти рівнянь поправок у даному циклі.

В табл. 2 подано приклад визначення параметрів апроксимації осідань експонентою для одного контрольного репера споруди, які отримано із нівелювання II-го класу в 9-ти робочих циклах впродовж 4-х років (0-ий цикл – вихідний). Спочатку доцільно побудувати графік вимірних осідань репера (рис. 1), щоби відстежити тенденцію їх затухання і визначити наближене значення кінцевого осідання, наприклад, $S_k^0 \approx S_7 = 76$ мм, за яким при $\bar{S} = 475,9/8 = 59,5$ мм і $\bar{t} = 216/8 = 27$ міс. згідно з формулою (12) отримано середнє значення коефіцієнта $\bar{k}^0 = 0,056$ мм/міс., що дозволяє обмежитися одною (рідко двома) ітераціями, хоча це може залежати й від кількості вимірювань та змін характеристик осідального процесу. Але не дивлячись на ці переваги, особливо виконання спрощених обчислень, метод “середнього коефіцієнта” вимагає складання і розв’язку нормальних рівнянь, оскільки без цього не можна оцінити точність визначення параметрів апроксимації за формулами (17-18). При цьому визначається поправка ΔS_k , що забезпечує корекцію наближеного значення кінцевого осідання S_k^0 , за яким згідно з формулою (12) визначався середній коефіцієнт інтенсивності осідання. Поправки до кінцевого осідання і

наближеного абсолютного значення коефіцієнта вводяться зі своїми знаками. Якщо ж осіданням на графіку надавати знак “мінус”, що відображає справжній напрям вектора пониження положення репера, то це вимагатиме також і зміни знаку поправки ΔS_k .

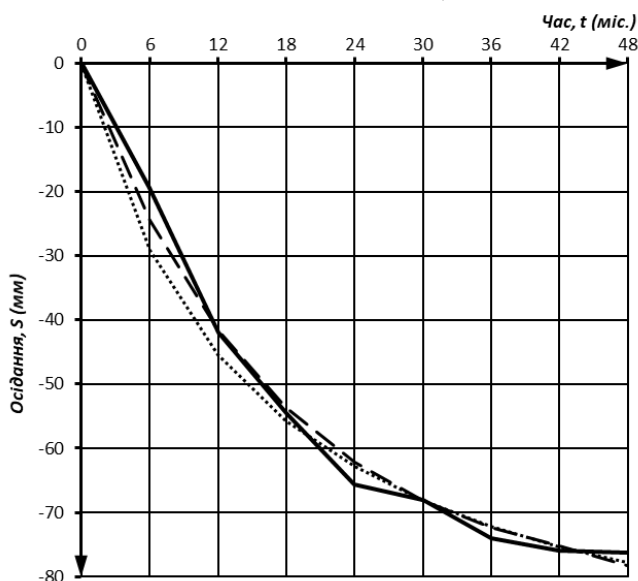


Рис. 1. Графік апроксимації осідань експонентою і ДРФ

----- реальні осідання; — — — апроксимація експонентою, апроксимація ДРФ

Таблиця 2

Визначення параметрів апроксимації осідань експонентою

№ циклів спостер.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Сума	Середнє
t , міс	0	6	12	18	24	30	36	42	48	216	27
S_t , мм	0	19,4	42,0	54,5	65,7	68,1	74,0	76,0	76,2	479,5	59,5
1. Обчислення наближених величин ($S_k^0 \approx 76$ мм; $k \approx 0,056$ мм/міс.)											
S_t^0 , мм	0	21,7	37,2	48,3	56,2	61,8	65,9	68,8	71,8	430,7	53,8
l , мм	0	2,3	-4,8	-6,2	-9,5	-6,3	-8,1	-7,2	-5,4	-45,2	-5,6
a	0	0,285	0,489	0,635	0,739	0,814	0,861	0,867	0,905	-	-
b	0	326	466	499	476	425	364	304	248	-	-
2. Точні обчислення параметрів осідання ($S_k^0 \approx 83,5$ мм; $\bar{k}^0 \approx 0,058$ мм/міс.)											
$S_{t_i}^a$, мм	0	24,5	41,6	53,7	62,2	68,1	72,3	75,2	78,3	474,9	59,4
v , мм	0	5,1	-0,4	-0,8	-3,5	0,0	-1,7	-0,8	1,1	-1,0	-0,1

За даними табл. 2 складено нормальні рівняння

$$4,3711\Delta S_k + 2157,4\Delta k - 36,346 = 0;$$

$$2157,4\Delta S_k + 1267037\Delta k - 18258 = 0,$$

звідки при $D = 883818$; $D_S = 6660422$ і $D_k = 1395,1$ отримано поправки $\Delta S_k = 7,54$ мм і $\Delta k = 0,0016$ мм/міс., а потім шукані величини $S_k = 76 + 7,5 = 83,5$ мм і $k = 0,056 + 0,002 = 0,058$ мм/міс. Тому апроксимовані осідання

$$S_{t_i}^a = 83,5(1 - e^{-0,058t_i}).$$

Тепер згідно з формулою (10) обчислено поправки до вимірних осідань, сума яких становить - 0,1 мм і, отже, дозволяє зробити висновок, що задача розв'язана правильно і немає потреби в обчисленнях у 2-му наближенні. Про це свідчать і результати оцінки точності параметрів апроксимації, які визначено за формулами (17) і (18), а саме:

$$\mu = \sqrt{40,86/6} = 2,6\text{мм}; m_{S_k} = 2,6\sqrt{1,43} = 3,1\text{мм}; m_k = 2,6\sqrt{0,0000049} = 0,006\text{мм/міс.}$$

Для прикладу нижче наведено визначення похибки апроксимованого осідання контрольного репера у 4-му циклі, де згідно з формулою (18) при

$$\mu = 2,6\text{мм}; a_4 = 0,739; b_4 = 476 \text{ і } Q_{12} = \frac{-2157}{4,3711}(0,0000049) = 0,0024 \text{ похибка}$$

$$m_{S_4} = 2,6\sqrt{0,739^2 \cdot 1,43 + 476^2 \cdot 0,0000049 + 2 \cdot 0,739 \cdot 476 (-0,0024)} = 1,2 \text{ мм,}$$

яка узгоджується з рівнем точності нівелювання і даними апроксимації графіка вимірних осідань.

Апроксимовані осідання на рис. 1 відображають характер деформаційного процесу в зоні розташування даного репера. Отже, метод "середнього коефіцієнта інтенсивності осідання" суттєво спрощує складну систему ітераційних обчислень і забезпечує високу ефективність аналізу даних моніторингу деформаційних процесів споруд.

Зауважимо, що якщо спостереження ведуться за контрольними марками, розташованими на ярусах висотних споруд, то у їх висотні позначки необхідно щопрохідно вводити поправки за температурну деформацію споруди [Баран, 2007].

Для ефективної організації циклічних спостережень доцільно визначити раціональні міжциклові інтервали $\Delta t_{i,i+1} = t_{i+1} - t_i$, складові яких обчислюють на основі формули (2) і (3). Там же наведено приклад визначення цих інтервалів.

Апроксимація осідань дрібно-раціональною функцією. Осідання описується простою залежністю [Зиборов, 2004]

$$S_{t_i} = \frac{at_i}{b + t_i} \quad (19)$$

де a, b – невідомі параметри апроксимації, які підлягають визначенню з використанням рівнянь поправок

$$t_i a - S_{t_i} b - t_i S_{t_i} = v_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (20)$$

Задача розв'язується МНК з двох квадратних рівнянь

$$\begin{aligned} [t^2]a - [tS]b - [t^2S] &= 0; \\ -[tS]a + [S^2]b + [tS^2] &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Для прикладу розв'язку задачі взято ті ж дані вимірювань осідань у 9-ти циклах із табл.2, за якими отримано такі нормальні рівняння:

$$7344a - 14734,8b = 529070,4;$$

$$-14734,8a + 31123,15b = -1038051,84$$

та визначено параметри апроксимації: детермінант $D = 11454082,56$; $D_a = 1170851168$; $D_b = 172293817$; коефіцієнти $a = 102,2213$ мм/міс. і $b = 15,042$ міс. Апроксимовані значення осідань обчислюють за простою формулою (19). Результати обчислень наведено в табл. 3.

Таблиця 3

Апроксимація осідань дрібно-раціональною функцією

Цикл	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Сума
t , міс.	0	6	12	18	24	30	36	42	48	216
S_{t_i} , мм	0	19,4	42,0	54,5	65,7	68,1	74,0	76,0	76,2	475,9
$S_{t_i}^a$, мм	0	29,2	45,4	55,7	62,8	68,1	72,1	75,3	77,8	486,4
$v = S_{t_i}^a - S_{t_i}$, мм	0	9,8	3,4	1,2	-2,9	0,0	-1,9	-0,7	1,6	10,5

Як бачимо, сума всіх поправок (без врахування поправок 1-го циклу) близька до нуля, сума їх квадратів становить $124,11 \text{ мм}^2$ і похибка осідання $\mu = \sqrt{124,11/6} = 4,5 \text{ мм}$.

Похибки коефіцієнтів a і b відповідно становлять:

$$m_a = 4,5\sqrt{0,0027} = 0,23\text{мм}; m_a = 4,5\sqrt{0,00064} = 0,1\text{міс.}$$

Аналогічно до попереднього методу за даними апроксимації складається графік осідань з кривою апроксимації та оцінюється правильність відображення осідального процесу (рис. 1). Порівнявши положення кривих апроксимації осідань двома описаними методами, можна констатувати, що експонента асимптотично краще відображає наближення осідань до стабілізації, чим ДРФ.

Проте, метод дрібно-раціональної функції простіший в реалізації від експоненти і забезпечує високу точність апроксимації.

Для розрахунку допустимого часового інтервалу між циклами спостережень необхідно також виходити зі швидкості осідань, звідки отримані такі залежності:

$$v = \frac{\Delta S_{i,i+1}}{\Delta t_{i,i+1}} \approx \frac{ab}{(b + \bar{t}_{i,i+1})^2}; \Delta t_{i,i+1} \approx \frac{\Delta S}{ab} (b + \bar{t}_{i,i+1})^2; m_{\Delta t_{i,i+1}} = \Delta t_{i,i+1} / 10\sqrt{2}, \quad (22)$$

де $\bar{t}_{i,i+1} = (t_i + t_{i+1})/2$ – середній часовий інтервал між суміжними циклами.

Згідно з даними табл.3 похибка дотримання часового інтервалу між виконанням 2-го і 3-го циклів становить $m_{\Delta t_{i,i+1}} \approx \frac{12,5 \cdot (15+15)^2}{1500 \cdot 10\sqrt{2}} \approx 0,54\text{міс.} \approx 16\text{днів.}$

Якщо параметри апроксимації невідомі, наприклад, в початковий період спостережень, то за їх наближені значення можна взяти відповідно величини $a \geq S_k$ і $b \leq t_k$. Очевидно, що у стадії стабілізації осідань, коли $b \approx t_k$, швидкість осідання $v \approx S_k / 4t_k$, а $\Delta t_k \approx 4t_k m_{\Delta S} / S_k$. Тому, при $S_k \approx 76\text{мм}$, $t_k = 48\text{міс.}$ та мінімальній похибці вимірювання осідань $m_{\Delta S} = 1\text{мм}$ похибка часового інтервалу між циклами вимірювань не має перевищувати 2,5 місяців.

Апроксимація осідань функцією полінома. Загальна функція апроксимації осідання описується виразом

$$S_t = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots + a_m t^m, \quad (23)$$

де a_i – коефіцієнти полінома ($i = 1, 2, 3, \dots, m$).

На практиці переважно використовують поліноми 2-го і 3-го порядку, тобто квадратну і кубічну параболу.

Для прикладу розв'язку задачі апроксимації в табл. 4 наведено дані попередніх осідань.

Таблиця 4

Апроксимація осідань кубічною параболою

№ циклів спостережень	0	1	2	3	4	5	6	7	8	Сума
t , міс.	0	6	12	18	24	30	36	42	48	216
S_t , мм	0	19,4	42,0	54,5	65,7	68,1	74,0	76,0	76,2	475,9
S_t^a , мм	0	21,2	39,0	53,5	64,6	72,4	76,8	77,9	75,6	481,0
$v = S_t^a - S_t$, мм	0	1,8	-3,0	-1,0	-1,1	4,3	2,8	1,9	-0,6	5,1

Згідно з (23) для квадратної параболу складено рівняння поправок потім нормальні рівняння у вигляді

$$t_i a_1 + t_i^2 a_2 - S_i = v_i; \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m), \quad (24)$$

$$[t^2] a_1 + [t^3] a_2 - [tS] = 0; \quad (25)$$

$$[t^3] a_1 + [t^4] a_2 - [t^2 S] = 0,$$

і реальні рівняння:

$$7344a_1 + 279936a_2 + 14734,8 = 0;$$

$$279936a_1 + 11368512a_2 - 529070,4 = 0.$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, отримаємо:

$$a_1 = 3,8144; a_2 = -0,046677; D = 5126188032; Q_{11} = 0,00222; Q_{22} = 0,0000014.$$

Тепер апроксимовані осідання можна обчислити за формулою

$$S_i^a = 3,8144t_i - 0,046677t_i^2$$

В таблиці 4 наведено поправки, сума яких практично наближена до нуля, що дозволяє визначити похибку одного осідання $\mu = \sqrt{44,75/6} = 2,73$ мм. Похибки визначення коефіцієнтів апроксимації:

$$m_{a_1} = 2,73\sqrt{0,0022} = 0,13 \text{ мм/міс.}; m_{a_2} = 2,73\sqrt{0,0000014} = 0,0033 \text{ мм/міс}^2.$$

Якщо побудувати графіки реальних і апроксимованих осідань, то можна побачити, що квадратна парабола в останньому циклі дещо зменшує осідання (в цьому прикладі – на 3 мм), що межує з похибкою визначення самих осідань. Тому, для уникнення таких непорозумінь доцільніше застосувати кубічну параболу, параметри якої можна визначити із системи трьох нормальних рівнянь

$$\begin{aligned} [t]a_1 + [t^2]a_2 + [t^3]a_3 - [tS] &= 0; \\ [t^2]a_1 + [t^3]a_2 + [t^4]a_3 - [tS^2] &= 0; \\ [t^3]a_1 + [t^4]a_2 + [t^5]a_3 - [tS^3] &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Апроксимовані осідання обчислюються за формулою (23). Оцінка точності параметрів ведеться з використанням похибки μ осідання коефіцієнтів матриці нормальних рівнянь.

Апроксимація періодичних осідань синусоїдою. Синусоїда може використовуватися в комбінації з прямою лінією чи параболою, або самостійно для осідань, що мають коливальний характер, викликаний періодичною зміною рівня ґрунтових вод (підтопленням), або сезонною зміною температури будівлі. Треба зауважити, що у літературі, зокрема у [Баран, Справочник по инженерной геодезии], часто рекомендують функцію прямої або полінома з коефіцієнтами при t , чим порушується основна умова апроксимації, щоби її крива проходила через початок координат, де S і t дорівнюють нулеві. Нижче подано простий спосіб апроксимації періодичної функції з прямою такого виду:

$$S^a = b_1t + b_2 \cos \omega t + b_3 \sin \omega t; \quad \omega = 2\pi / T, \quad (27)$$

де ω – частота коливань, $T = [t]$ – період коливань.

На основі рівняння поправок

$$t_i b_1 + \cos \omega t_i b_2 + \sin \omega t_i b_3 - S_i = v_i \quad (28)$$

складається і розв'язується система нормальних рівнянь

$$\begin{aligned} [t^2]b_1 + [t \cos \omega t]b_2 + [t \sin \omega t]b_3 &= [tS]; \\ [t \cos \omega t]b_1 + [\cos^2 \omega t]b_2 + [\cos \omega t \sin \omega t]b_3 &= [S \cos \omega t]; \\ [t \sin \omega t]b_1 + [\cos \omega t \sin \omega t]b_2 + [\sin^2 \omega t]b_3 &= [S \sin \omega t]. \end{aligned} \quad (29)$$

Приклад вимірювання осідань у 9-ти робочих циклах наведено в табл. 5.

Таблиця 5

**Апроксимація осідань прямою лінією та синусоїдою
($T=478$; $\omega=0,013145$ рад.; $[S]=210$ мм)**

№циклів	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Сума	Середнє
T , міс.	0	12	22	33	44	52	64	73	82	96	478	53,1
S , мм	0	24	30	15	21	27	18	26	24	25	210	23,3
ωt , рад.	0	0,158	0,289	0,434	0,578	0,684	0,841	0,960	1,078	1,262	-	-
$\cos \omega t$	0	0,988	0,960	0,907	0,837	0,775	0,666	0,574	0,473	0,304	-	-
$\sin \omega t$	0	0,157	0,285	0,420	0,547	0,632	0,745	0,820	0,880	0,953	-	-
S^a , мм	0	24,5	23,9	23,1	22,4	22,0	22,0	22,4	23,4	26,2	209,9	23,3
v , мм	0	0,5	-6,1	8,1	1,4	-5,0	4,0	-3,6	-0,6	1,2	-0,1	-0,01

За даними табл. 5 складено нормальні рівняння

$$31722b_1 + 292,582b_2 + 350,109b_3 = 11189;$$

$$292,582b_1 + 5,10962b_2 + 3,43059b_3 = 150,462;$$

$$350,109b_1 + 3,43059b_2 + 3,89038b_3 = 126,832,$$

звідки отримано: $b_1 = 0,830492$ мм/міс.; $b_2 = 24,9615$; $b_3 = -64,1489$. Потім за рівняннями (27) і (28) обчислено апроксимовані осідання і поправки, які наведені внизу табл. 5. Сума цих осідань становить 209,9 мм, а поправок -0,1мм, які свідчать про правильність розв'язку задачі. Сума квадратів поправок дорівнює 160,79 мм² і середня квадратична похибка апроксимованого осідання становить 5,2 мм.

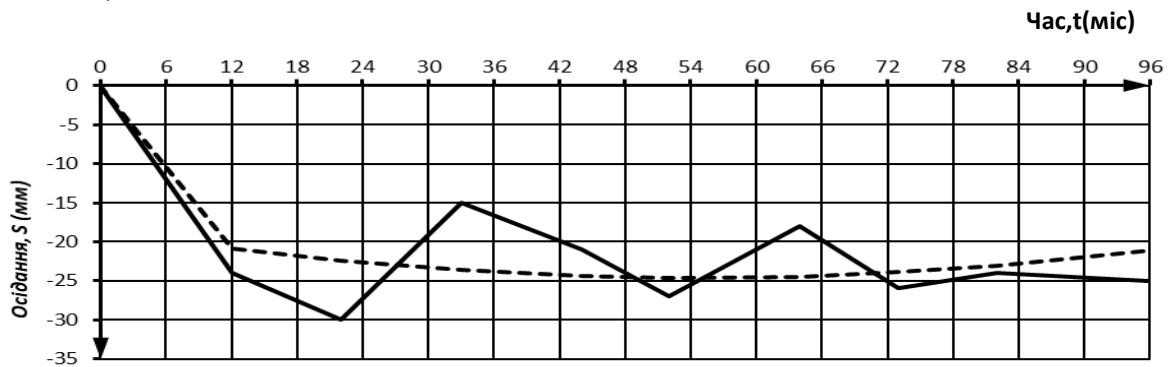


Рис. 2. Графік апроксимації реальних осідань синусоїдою:

----- реальні осідання; — — апроксимація осідань синусоїдою

На графіку осідань (рис. 2) показано періодичний характер реальних осідань, але крива апроксимованих осідань не відображає їх коливальний характер, що може бути предметом спеціального дослідження. Більше того, приєднання прямої до синусоїди мало впливає на процес апроксимації, в чому легко переконатися, коли користуватися тільки синусоїдою, взявши рівняння поправок (27) без першого члена, тобто у вигляді:

$$\cos \omega t b_2 + \sin \omega t b_3 - S_i = v_i. \quad (30)$$

При цьому нормальні рівняння (29) будуть:

$$5,10962b_2 + 3,43059b_3 = 150,462;$$

$$3,43059b_2 + 3,89038b_3 = 126,832,$$

звідки отримано: $b_2 = 18,553$ і $b_3 = 16,232$ мм.

Для спрощення обчислень за формулами (27) і (30) доцільніше їх синусоїдну частину замінити виразом

$$b_2 \cos \omega t + b_3 \sin \omega t = A \sin(\omega t + \varphi); \quad (31)$$

$$A = \sqrt{b_2^2 + b_3^2}; \quad \varphi = \arctg(b_2 / b_3),$$

де A, φ – амплітуда і зсув фази коливань.

Вказане перетворення обумовлено тим, що коефіцієнти $b_2 = A \sin \varphi$ і $b_3 = A \cos \varphi$ разом з кутом ωt формують вираз синуса суми двох кутів.

Апроксимовані синусоїдою осідання і поправки до них обчислено за формулами (27) із врахуванням (30) та наведено в табл. 6. При цьому використано $A = 24,6$ мм і $\varphi = \arctg(1,1430) = 0,8520$ рад.

Сума апроксимованих осідань становить 208,5 мм, сума поправок -1,8 мм, сума їх квадратів 220,86 мм², а середня квадратична похибка апроксимованого осідання 5,6 мм (для синусоїди з прямою вона дорівнює 5,2 мм, а величина середніх квадратичних відхилень між двома апроксимаційними синусоїдами становить 2,6 мм), які свідчать про можливість використання простої синусоїди для умовної апроксимації циклічних осідань.

Апроксимація осідань синусоїдою

№ цикла	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Сума	Серед- не
T , міс.	0	12	22	33	44	52	64	73	82	96	478	53,1
S , мм	0	24	30	15	21	27	18	26	24	25	210	23,3
S^a , мм	0	20,9	22,4	23,6	24,4	24,6	24,5	23,9	23,1	21,1	208,5	23,3
v , мм	0	-3,2	-7,6	-8,6	-3,4	-2,4	6,4	-2,1	-1,0	-3,9	-1,8	-0,2

^vСкладніші функції поліномів для таких задач розглядаються у праці [Bryś, Przewlocki, 1998.

Наукова новизна і практична значущість.

Виконані удосконалення підвищують ефективність і репрезентативність даних апроксимації, сприяють зменшенню обсягу обчислень. Розроблення методики розрахунку часових інтервалів між циклами спостережень для різних функцій апроксимації дозволяє практично вилучити ітераційний процес визначення коефіцієнта інтенсивності осідання для експоненти та використання цього коефіцієнта для уточнення коефіцієнтів стисливості або пористості ґрунту, які визначаються за його лабораторними дослідженнями.

Висновки

- Підводячи підсумки розгляду методів апроксимації осідань, можна зробити такі рекомендації.
1. Для повнішого аналізу деформаційного поля споруд найдоцільнішим є метод апроксимації експонентою, яка дозволяє визначати інтегральний коефіцієнт інтенсивності осідання, а за ним згідно з формулами (2) – уточнити значення коефіцієнтів стисливості або пористості ґрунту.
 2. Найпростішим в реалізації обчислювального процесу виявився метод дрібнораціональної функції, який за всіма показниками суттєво переважає навіть метод простих поліномів.
 3. Методи простих поліномів і синусоїд не придатні для апроксимації періодичних функцій, тому необхідно виконання спеціальних досліджень для їх ускладнених виразів.
 4. Точність визначення раціональних міжциклових часових інтервалів залежить від швидкості осідального процесу та форми кривої апроксимації.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- Баран, П. І. Тригонометричне нівелювання в інженерно-геодезичних роботах / П.І. Баран, Ф. Ф. Соловійов, В. Я. Чорнокінь; за ред. проф. П. І. Барана. – К.: Укргеодезкартографія, . – 1997. – 130 с.
- Баран, П. І. Інженерна геодезія: Монографія/ П.І. Баран. – К.: ПАТ “ВПІОЛ”, 2012. – 618 с.
- Баран, П. І. Топографія та інженерна геодезія: підруч. для студ. геодез. негеодез. спец. ВНЗ / П.І. Баран, М. П. Марущак. – Київ: Знання України, 2015. – 463 с.
- Баран, П. І. Врахування температурної деформації при вимірюванні горизонтальних і вертикальних зміщень інженерних споруд/ П.І. Баран // Вісн. Геодез. та картогр. – 2007. – №4. – с. 14–20.
- Видуев, Н. Г. Расчет необходимой точности наблюдений за осадками инженерных сооружений / Н.Г. Видуев, В.С. Староверов // Сб. Инж. геодез., 1972, вып.12, - с. 3–12.
- ДСТУ Б В.2.1-30:2014 Ґрунти. Методи вимірювання деформацій основ будинків і споруд.
- Зиборов, В. В. Новая методика определения коэффициентов модели осадочного процесса / В.В. Зиборов// Сб. Инж. геодез.,1972, вып. 39, – с. 72–75.
- Зиборов, В. В. О моделировании осадочного процесса дробно-рациональной функцией / В.В. Зи-боров// Сб. Инж. геодез.,2004, вып. 50,– с.72-75.
- Справочник по инженерной геодезии; под. общей ред. Н. Г. Видуева / П.И. Баран, Н. Г. Видуев, С. П. Войтенко [и др.]. – К/.: Вища шк., 1978. – 376 с.
- Bryś H., Przewlocki S. Geodezyjne metody pomiarów przemieszzeń budowli. WNPWN, Warszawa,1998, -243 s.

Надійшла 23.01.2018 р.