

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КІНЕТИКИ ВИРІВНЮВАННЯ ТИСКУ ГАЗУ В ПОРИСТОМУ ШАРІ ЗА МАЛИХ ЗБУРЕНЬ

© Чекурін В., Притула З., 2017

**Розглянуто математичну модель нестационарної фільтрації газу в пористому плоскому шарі за малих збурень тиску. Отримано лінеаризоване рівняння фільтрації, коефіцієнти якого залежать від параметрів пористого середовища, термодинамічних властивостей газу та величини незбуреного тиску в шарі. Сформульовано задачу кінетики вирівнювання тиску в шарі для випадку малих локальних збурень. З використанням функції Гріна отримано її аналітичний розв'язок. На основі отриманого розв'язку кількісно досліджено вплив коефіцієнта проникливості та величини незбуреного тиску на швидкість загасання тиску.**

**Ключові слова:** пористий шар, пласт, підземне сховище газу, фільтрація газу, мале збурення тиску газу, коефіцієнт проникливості.

**The mathematical model of nonstationary gas filtration in porous plane layer under small perturbations of gas pressure is considered. We have obtained the linearized filtration equation with the coefficients depending on the parameters of the porous medium, the thermodynamic characteristics of gas and the value of unperturbed pressure in the layer. A problem of kinetics of equalization of pressure in the layer in the case of small local perturbations was formulated. Using the Green function, we have obtained an analytical solution of the problem. On the basis of obtained solution we have quantitatively investigated the influence of permeability coefficient and the value of unperturbed pressure on the rate of damping pressure.**

**Key words:** porous layer, reservoir, underground gas storage, gas filtration, small perturbation of gas pressure, permeability coefficient.

### Вступ

Геологічні пористі пласти часто використовують для створення підземних сховищ газу [1, 2]. Експлуатаційні характеристики таких об'єктів, зокрема їхні ємнісні властивості, допустимі швидкості відбору й нагнітання газу та енергозатрати, необхідні для реалізації цих процесів, істотно залежать від коефіцієнтів пористості, проникливості тощо [3–7].

Під час експлуатації сховища процеси нагнітання та відбору газу чергуються із процесом зберігання. Під час зберігання тиск у пористому пласті вирівнюється, а під час нагнітання та відбору відбуваються локальні збурення тиску в околі робочих свердловин. Дані моніторингу тиску в робочих та контрольних свердловинах можна використати для оцінювання експлуатаційних властивостей сховища, зокрема їхніх пікових характеристик, які визначаються максимально допустимими швидкостями відбору та нагнітання газу. Це можливо реалізувати, розв'язуючи відповідні обернені задачі нестационарної фільтрації в пористих шарах.

Проте сьогодні такі задачі ще навіть не сформульовано математично. Це пояснюється зокрема тим, що фільтраційні процеси в пористих середовищах описуються суттєво нелінійними диференціальними рівняннями із частинними похідними, для яких не відомі аналітичні розв'язки [8].

Проте за малих відхилень від рівноважного стану ці процеси з достатньою точністю можна описати і за допомогою відповідних лінеаризованих рівнянь [9]. Тому у цій роботі розглянуто кінетику процесу вирівнювання тиску газу в пористому плоскому шарі за малих збурень. Для опису процесу фільтрації за таких умов використано лінеаризоване рівняння нестационарної фільтрації, коефіцієнти якого залежать від характеристик пористого середовища, термодинамічних влас-

тивостей газу та незбуреного тиску. В межах такої математичної моделі кількісно досліджено процеси вирівнювання малих локальних збурень тиску газу в шарі залежно від коефіцієнта проникливості пористого середовища та величини незбуреного тиску.

### Постановка задачі фільтрації газу в пористому шарі

Розглянемо процес одновимірної ізотермічної фільтрації газу в пористому шарі, який описується таким нелінійним рівнянням [10]

$$m \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{k\sqrt{P}}{\mu} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Тут  $P = p^2$ ,  $p = p(x, t)$  – тиск;  $k$  – коефіцієнт проникливості;  $\mu$  – динамічний коефіцієнт в'язкості газу,  $m$  – коефіцієнт пористості,  $x$  – просторова координата,  $t$  – час.

Вважаємо, що поверхні шару  $x=0$  та  $x=L$  є непроникними. Тоді матимемо такі граничні умови

$$\rho w_x|_{x=0} = 0, \quad \rho w_x|_{x=L} = 0, \quad (2)$$

де  $\rho$  – густина;  $w_x$  – швидкість фільтрації у напрямку осі  $x$ , яка за законом Дарсі виражається через тиск  $p$  [11]

$$w_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Запишемо граничні умови відносно змінної  $P$ . У результаті отримаємо

$$\frac{\partial P}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x}|_{x=L} = 0. \quad (3)$$

Вважаємо, що задано розподіл тиску в початковий момент часу. Тоді початкова умова відносно змінної  $P$  має вигляд

$$P(x, 0) = P_0(x). \quad (4)$$

Тобто, отримано крайову задачу (1), (3), (4), яка описує вирівнювання тиску в пористому шарі. Оскільки задача є нелінійною, то проведемо дослідження кінетики перерозподілу тиску за малих відхилень початкового розподілу від однорідного.

### Формулювання задачі дослідження кінетики перерозподілу тиску газу в шарі за малих відхилень початкового тиску

Розглянемо випадок, коли кількість газу, яка є в шарі, залишається незмінною, тобто

$$m \int_0^L \rho(x, t) dx = M = \text{const}.$$

Нехай  $p(x)$  – розподіл тиску в початковий момент часу, а  $\bar{p}$  – однорідний тиск, який встановиться після вирівнювання. Нехай відхилення  $p(x) - \bar{p}$  є достатньо малим:  $\frac{p(x) - \bar{p}}{\bar{p}} \ll 1$ .

Оскільки процес перерозподілу газу є релаксаційним, то і для моменту часу  $t > 0$  має виконуватись умова:  $\frac{p(x, t) - \bar{p}}{\bar{p}} \ll 1$ . Ця умова дає змогу лінеаризувати рівняння (1).

Означимо збурення змінної  $P$  так:

$$\tilde{P}(x, t) = \frac{P(x, t) - \bar{P}}{\bar{P}},$$

де  $\bar{P} = \bar{p}^2$ . З урахуванням малості збурення  $\tilde{p} = \frac{p(x, t) - \bar{p}}{\bar{p}}$  отримуємо співвідношення:  $\tilde{P} = 2\tilde{p}$ .

Лінеаризоване рівняння відносно змінної  $P$  має такий вигляд

$$\frac{\partial \tilde{P}(x,t)}{\partial t} = \frac{k\bar{p}}{\mu m} \frac{\partial^2 \tilde{P}(x,t)}{\partial x^2}, \quad (5)$$

а граничні умови на поверхнях шару  $x=0$ ,  $x=L$  та початкова умова для збурення  $\tilde{P}$  відповідно такі:

$$\left. \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad (6)$$

$$\tilde{P}(x,0) = \tilde{P}_0(x). \quad (7)$$

У результаті сформульовано задачу кінетики вирівнювання тиску в шарі для випадку малих локальних збурень.

### Подання розв'язку задачі із використанням функції Гріна

Задачу (5)–(7) розв'язуємо, використовуючи метод функції Гріна. Рівняння (5) є диференціальним рівнянням параболічного типу, для якого відома функція Гріна [12].

Функція Гріна задачі (5)–(7) має вигляд [12]

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n x}{L} \cos \frac{\pi n \xi}{L} e^{-\frac{k\bar{p}\pi^2 n^2}{\mu m L^2} t}. \quad (8)$$

Розв'язок задачі (5)–(7) можна знайти за такою формулою [12]

$$\tilde{P}(x,t) = \int_0^t \int_0^L G(x,\xi,t-\tau) \omega(\xi,\tau) d\xi d\tau.$$

Тут  $\omega(x,t) = \tilde{P}_0(x)\delta(t)$  – навантажувальна функція;  $\delta(t)$  – функція Дірака.

Тоді з використанням означення дельта-функції, а також вигляду навантажувальної функції та беручи до уваги співвідношення між збуреннями  $\tilde{P}$  та  $\tilde{p}$ , для збурення тиску  $\tilde{p}$  отримуємо

$$\tilde{p}(x,t) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n x}{L} e^{-\frac{k\bar{p}\pi^2 n^2}{\mu m L^2} t} \int_0^L \tilde{P}_0(\xi) \cos \frac{\pi n \xi}{L} d\xi. \quad (9)$$

Отже, з використанням функції Гріна отримано аналітичний розв'язок задачі про вирівнювання тиску в пористому шарі за малих збурень.

### Дослідження впливу коефіцієнта проникливості на швидкість загасання тиску

Виберемо функцію  $\tilde{P}_0(\xi)$  у формі дельта-подібної функції із урахуванням того, що інтеграл від такої функції на визначеному проміжку дорівнює нулю, що випливає із фізичних умов задачі, оскільки маса газу залишається сталою. Для гладкості цієї функції врахуємо, що перші похідні на поверхнях шару дорівнюють нулеві. Тоді ця функція матиме вигляд:

$$\tilde{P}_0(\xi) = \frac{b}{1 + \left(\frac{\xi}{a}\right)^2} + c\xi^2 + d,$$

$$\text{де } c = \left(a^2 b\right) / \left[\left(1 + a^2\right)^2\right], \quad d = \left[-\frac{1}{3} ab \left(3 \operatorname{arctg} \frac{1}{a} \left(1 + a^2\right)^2 + a\right)\right] / \left[\left(1 + a^2\right)^2\right].$$

З метою дослідження впливу коефіцієнта проникливості  $k$  на кінетику вирівнювання тиску газу в шарі побудовано графіки розподілу тиску в шарі для різних значень цього коефіцієнта.

На рис. 1 зображені розподіл тиску  $\tilde{p}$  в шарі за таких параметрів:

$$\bar{p} = 50 \cdot 98066,5 \text{ Па}; \quad k = 5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2;$$

$$\mu = 1,283 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с} ; m = 0,2 ; L = 1000 \text{ м} .$$

При цьому криві 1–6 побудовано при  $t = 0, 500, 5000, 10000, 86000, 750000 \text{ с}$  відповідно. Зазначимо, що дані для фільтраційних характеристик відповідають суміші газів, в якій 96 % становить метан.

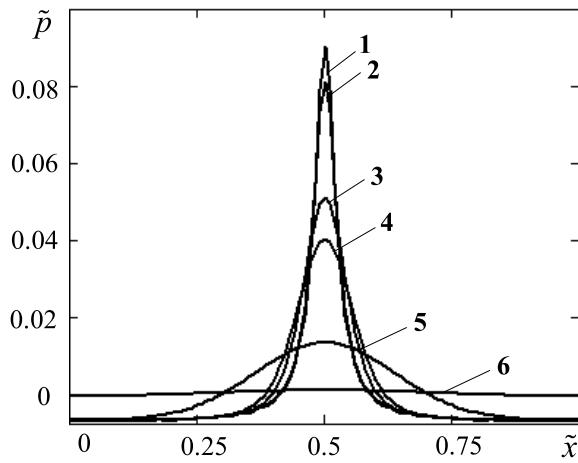


Рис. 1. Розподіл тиску  $\tilde{p}$  у шарі при  $k = 5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$

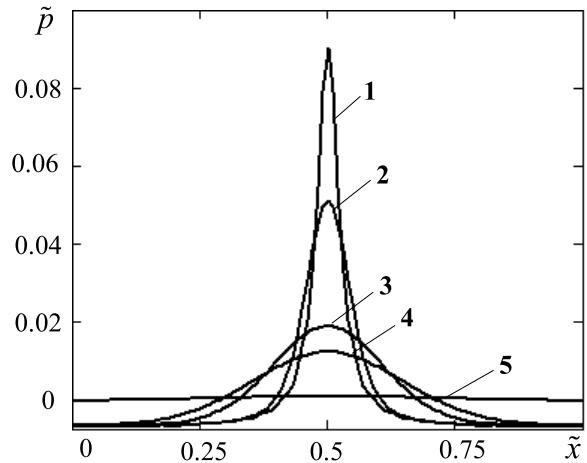


Рис. 2. Розподіл тиску  $\tilde{p}$  у шарі при  $k = 5 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2$

На рис. 2 показано розподіл тиску в шарі для  $t = 0, 500, 5000, 10000, 86000 \text{ с}$  (криві 1–5 відповідно) при  $k = 5 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2$ , а на рис. 3 – для  $t = 0, 500, 5000, 30000 \text{ с}$  (криві 1–4 відповідно) при  $k = 5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$ . Всі інші параметри відповідають даним для рис. 1.

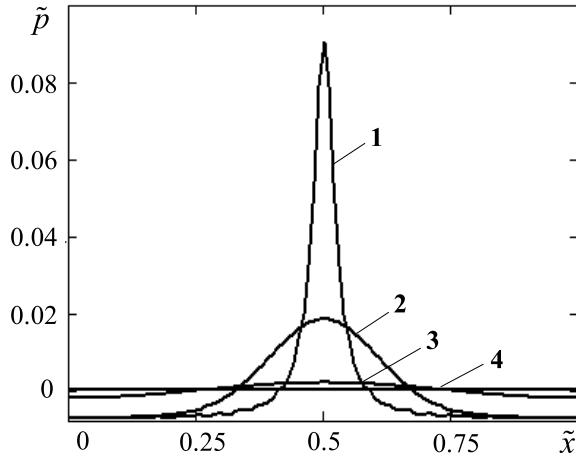


Рис. 3. Розподіл тиску  $\tilde{p}$  в шарі при  $k = 5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$

Із графіків видно, що із збільшенням коефіцієнта проникливості  $k$  швидкість загасання збільшується. У підземному сховищі довжиною  $L = 1000 \text{ м}$  при коефіцієнти проникливості  $k = 5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$  для вирівнювання тиску газу потрібно близько 9 діб, тоді як при  $k = 5 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2$  (рис. 2) тиск вирівняється за добу, а при  $k = 5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$  (рис. 3) – вже за третину доби.

На рис. 4 показано кінетику загасання тиску в точці  $\tilde{x} = 0.5$   $\tilde{p}(0.5, t)$ , нормованого на його значення в початковий момент часу  $\tilde{p}_m = \tilde{p}(0.5, 0)$ , за різних значень  $k$ , а саме,  $k = 5 \cdot 10^{-12}; 5 \cdot 10^{-13}; 2 \cdot 10^{-13}; 1,1 \cdot 10^{-13}; 5 \cdot 10^{-14} \text{ м}^2$  (криві 1–5 відповідно).

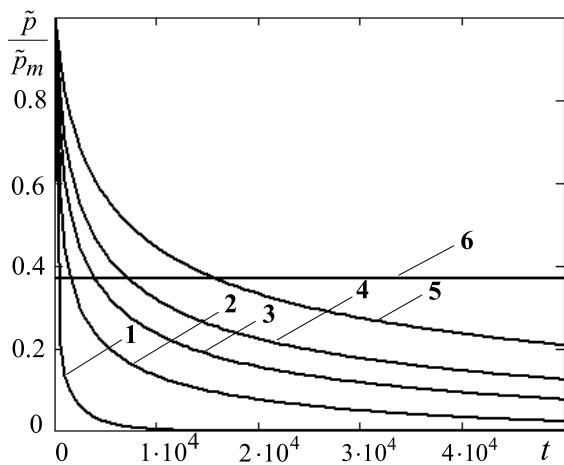


Рис. 4. Кінетика загасання тиску в точці  $\tilde{x} = 0.5$  за різних значень  $k$

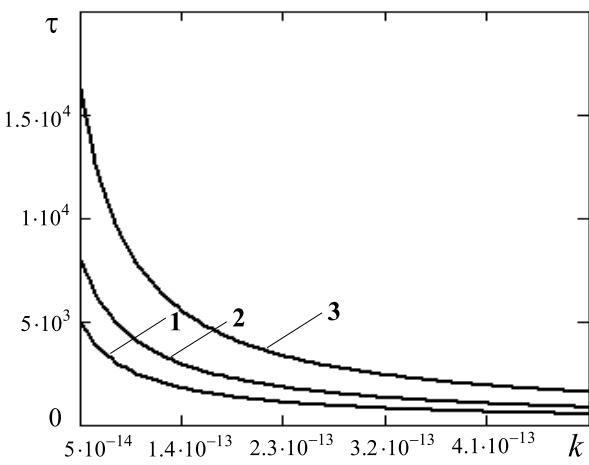


Рис. 5. Залежність часу загасання тиску від  $k$  за різних значень  $\bar{p}$

Оцінимо час релаксації за часом зменшення максимального значення тиску в точці  $\tilde{x} = 0.5$  у  $e$  разів. Крива 6 на рис. 4 зображує характерне значення  $1/e$ . Для цього характерного значення показано залежності часу загасання  $\tau$  від коефіцієнтів проникливості  $k$ , зокрема це ілюструють криві 1–3 на рис. 5, які побудовано відповідно для  $\bar{p} = 160 \cdot 98066,5; 100 \cdot 98066,5; 50 \cdot 98066,5$  Па. Як видно із рис. 5, зі збільшенням коефіцієнта проникливості  $k$  час загасання  $\tau$  зменшується, причому що більше значення незбуреного тиску  $\bar{p}$  в шарі, то менший час загасання.

#### Дослідження швидкості загасання тиску залежно від величини незбуреного тиску

Дослідимо також процеси вирівнювання малих локальних збурень тиску газу в шарі залежно від величини незбуреного тиску. Побудуємо графіки розподілу тиску в шарі для різних значень цієї величини.

На рис. 6 показано розподіл тиску в шарі для  $t = 0, 500, 5000, 10000, 30000, 120000$  с (криві 1–6 відповідно) при  $\bar{p} = 30 \cdot 98066,5$  Па, а на рис. 7 – для  $t = 0, 500, 5000, 10000, 40000$  с (криві 1–5 відповідно) при  $\bar{p} = 100 \cdot 98066,5$  Па.

Проілюстровані графіки показують, що за більшого значення незбуреного тиску  $\bar{p}$  тиск швидше вирівнюється. Зокрема, при  $\bar{p} = 100 \cdot 98066,5$  Па тиск в шарі завдовжки  $L = 1000$  м вирівнюється за 11 год (рис. 7), тоді як при  $\bar{p} = 30 \cdot 98066,5$  Па, для вирівнювання тиску газу необхідно близько 34 год.

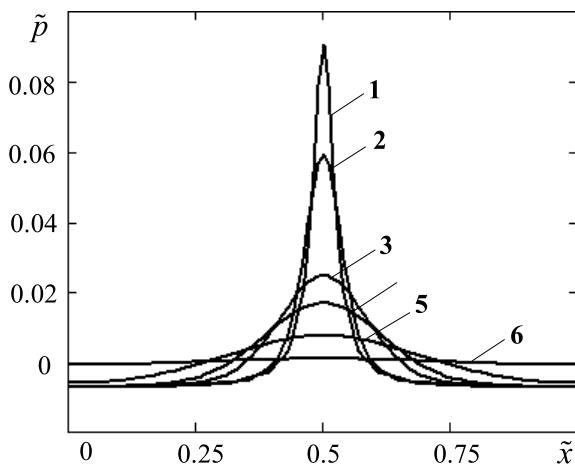


Рис. 6. Розподіл тиску  $\tilde{p}$  у шарі при  $\bar{p} = 30 \cdot 98066,5$  Па

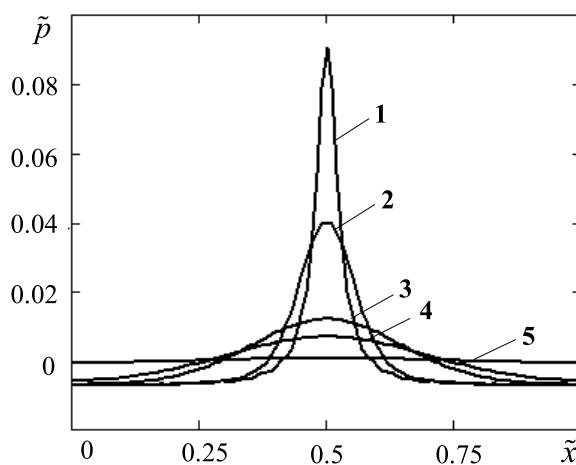


Рис. 7. Розподіл тиску  $\tilde{p}$  у шарі при  $\bar{p} = 100 \cdot 98066,5$  Па

З подальшим збільшенням значення незбуреного тиску  $\bar{p}$  спостерігаємо збільшення швидкості загасання. На рис. 8 криві 1–5 ілюструють відповідно графіки розподілу тиску  $\tilde{p}$  у шарі при  $\bar{p} = 160 \cdot 98066,5$  Па для різних часів, а саме, для  $t = 0, 500, 5000, 10000, 25000$  с. У цьому випадку тиск у шарі вирівнюється вже за 7 год.

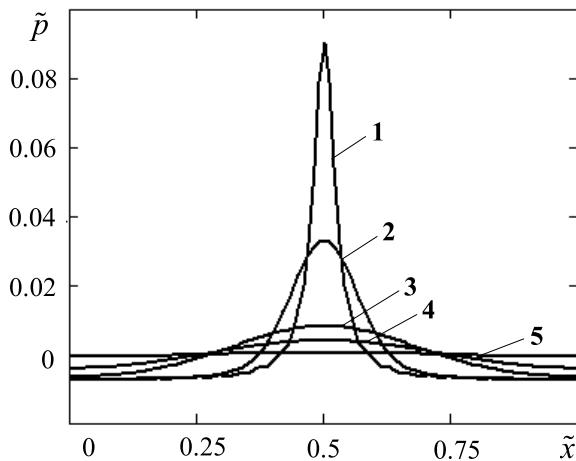


Рис. 8. Розподіл тиску  $\tilde{p}$  у шарі при  $\bar{p} = 160 \cdot 98066,5$  Па

На рис. 9 проілюстровано кінетику загасання тиску  $\tilde{p}$  у точці  $\tilde{x} = 0$   $\tilde{p}(0.5, t)$  за різних значень незбуреного тиску  $\bar{p}$ :  $160 \cdot 98066,5$ ;  $100 \cdot 98066,5$ ;  $60 \cdot 98066,5$ ;  $30 \cdot 98066,5$ ;  $10 \cdot 98066,5$  Па (криві 1–5 відповідно). Крива 6 на цьому рисунку зображує характерне значення  $1/e$ .

З метою оцінити час релаксації за часом зменшення максимального значення тиску в точці  $\tilde{x} = 0.5$  в  $e$  раз, на рис. 10 наведено залежності часу загасання  $\tau$  від величини незбуреного тиску  $\bar{p}$ . При цьому криві 1–3 на рисунку відповідають таким значенням коефіцієнта проникливості  $k$ :  $k = 5 \cdot 10^{-13}$ ;  $1.1 \cdot 10^{-13}$ ;  $5 \cdot 10^{-14}$  м<sup>2</sup>.

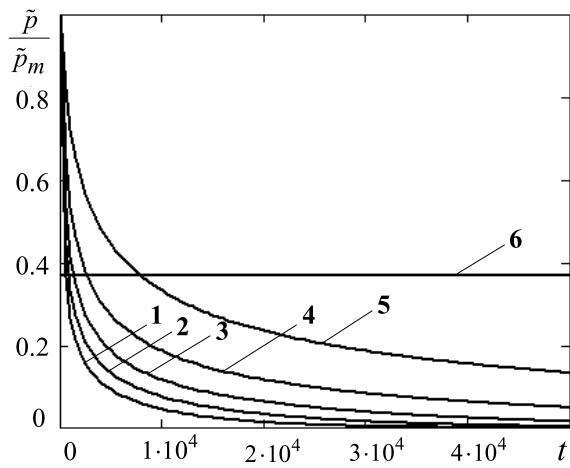


Рис. 9. Кінетика загасання тиску в точці  $\tilde{x} = 0.5$  за різних значень  $\bar{p}$

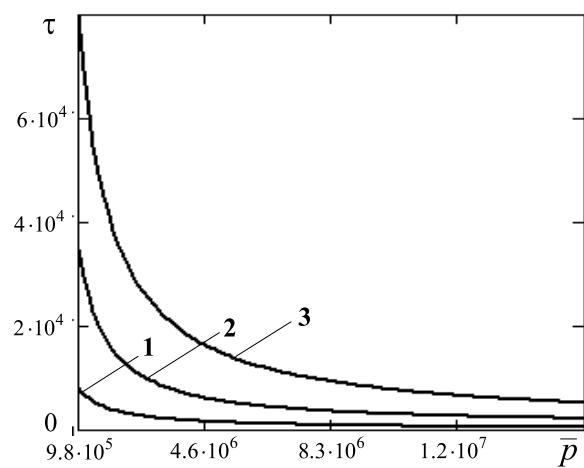


Рис. 10. Залежність часу загасання тиску від  $\bar{p}$  за різних значень  $k$

Як видно з рис. 10, зі збільшенням незбуреного тиску  $\bar{p}$  час загасання зменшується. При цьому що більший коефіцієнт проникливості, то менший час загасання.

## Висновки

У роботі досліджено кінетику процесу вирівнювання тиску газу в пористому плоскому шарі за малих збурень. Для опису процесу фільтрації за таких умов отримано лінеаризоване рівняння нестационарної фільтрації, коефіцієнти якого залежать від характеристик пористого середовища, термодинамічних властивостей газу та незбуреного тиску. Отримане рівняння доповнено відповідними граничними умовами на поверхнях шару та початковою умовою.

З використанням функції Гріна одержано аналітичний розв'язок сформульованої задачі. Встановлено кількісні закономірності процесів вирівнювання малих локальних збурень тиску газу в шарі залежно від коефіцієнта проникливості та величини незбуреного тиску.

1. Басніев К. С., Кочина И. Н., Максимов В. М. Подземная гидромеханика. – М.: Недра, 1993. – 416 с.
2. Азис Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 416 с.
3. Притула Н. М., Пянило Я. Д., Притула М. Г. Підземне зберігання газу (математичні моделі та методи). – Львів: Видавництво “Расмр-7”, 2015. – 266 с.
4. Misura S. Y. The influence of porosity and structural parameters on different kinds of gas hydrate dissociation // Scientific Reports. – 2016. – 6, 30324.
5. Miroshnichenko T. P., Lutsenko N. A., Levin V. A. Gas filtration from an underground reservoir at a large initial pressure gradient // J Appl. Mech. Tech Phy. – 2015. – Vol. 56, Issue 5. – P. 864–869.
6. Eskin L. D. A self-similar solution to the equation of gas filtration in a spherically symmetric porous medium // Russ. Math. – 2008. – Vol. 52, No. 8. – P. 48–57.
7. Akhmetzyanov A. V. Computational aspects in controlling filtration of fluids and gases in porous media // Autom. Remote Control. – 2008. – Vol. 69, Issue 1. – P. 1–12.
8. Щелкачев В. Н., Лапук Б. Б. Подземная гидравлика. – Москва-Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 736 с.
9. Algazin S. D. Numerical study of single-phase gas filtration in a porous medium // J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2011. – Vol. 52, Issue 4, 615.
10. Пыхачев Г. Б., Исаев Р. Г. Подземная гидравлика (учебное пособие). – М.: Недра, 1973. – 360 с.
11. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. – М.: ОГИЗ, Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1947. – 244 с.
12. Бутковский А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами (справочное пособие). – М.: Наука, 1979. – 224 с.