УДК 528.92

Б. Б. СЕРАПИНАС

О ВЫБОРЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ФИГУР В КАЧЕСТВЕ ЭТАЛОНОВ ДЛЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ПЛАНИМЕТРОВ

Для измерений площадей по картам часто используют элек-тронные планиметры со сканирующими устройствами и фото-электрическими приемниками. Такие приборы обладают высо-кой точностью и производительностью измерений. В проблем-ной лаборатории комплексного картографирования и атласов географического факультета МГУ на базе фототелеграфного аппарата «Ладога» сконструирован электронный планиметр позволяющий измерять площади контуров как по черно-белым так и по многоцветным изображениям [1, 2]. Погрешности из-мерений, в зависимости от размеров и конфигурации контуров колеблются от долей процента до нескольких процентов.

Площади планиметром измеряют построчным сканировани-ем изображений. При этом определяются в пределах контура длины строк сканирования l_i. Если шаг между строками ска-нирования b, то площадь S контура может быть вычислена по формуле

$$S = b \sum_{i=1}^{n} l_i, \qquad (1)$$

где n — число строк. Фактически прибором фиксируются не длины отрезков l_i, а время сканирования τ_i, и площадь S вы-числяется по формуле, равноценной (1):

$$S = \omega \sum_{i=1}^{n} f\tau_i, \qquad (2)$$

где f — частота генератора импульсов; ω — площадь, приходящаяся на 1 импульс.

Величина ω определяется по измерениям площадей эталонов. Эталоны нужны и при исследованиях технической точности планиметра. В связи с этим возникает вопрос, какие фигуры наиболее целесообразно использовать в качестве эталонов?

Результаты измерений (1) или (2) зависят от расположения данного контура по отношению к линиям сканирования. Если перед каждым измерением контур смещать поперек линий сканирования, то результаты измерений будут изменяться, периодически повторяясь после смещения на величину шага b между строками. Шаг вдоль строки сканирования значительно меньше шага между строками. По этой причине можно считать, что погрешности измерений длин отрезков l_i пренебрегаемо малы по сравнению с расстояниями между строками b. В этом случае, как показано в работе [4], дисперсия измерений площадей σ_S^2 может быть вычислена по формуле

$$\sigma_S^2 = {\sum_{K=-\infty}^{\infty}}' |C_K|^2, \quad (3) \qquad \text{где } C_K = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-i2\pi Ky/b}\, dy. \quad (4)$$

Ось y ориентирована поперек линий сканирования. Знак Σ' означает, что суммирование выполняется по всем целым числам K за исключением $K=0$.

В некоторых случаях удобнее выполнять интегрирование не по площади фигуры, что фактически делается в выражении (4), а по ее контуру. Это особенно важно, если контур фигуры сложный. Поэтому, используя известные правила [3], перейдем к интегралу по замкнутому контуру

$$C_K = \frac{b}{i2\pi K} \oint e^{-i2\pi Ky/b}\, dx. \quad (5)$$

Используя формулы (3) и (5), проанализируем дисперсии измерений площадей таких фигур, как прямоугольник, квадрат, равнобедренный треугольник, ромб и круг. Как эталоны эти фигуры имеют наибольшее значение, так как их сравнительно легко построить с заданной точностью. Опуская промежуточные преобразования, получаем следующие формулы для дисперсий измерений площадей упомянутых выше фигур:

1. Прямоугольник (рис. 1, *а*, L, H — стороны прямоугольника) [4]

$$\sigma_S^2 = b^2 L^2 q(1-q), \quad (6)$$

где $q = q\left(\frac{H}{b}\right)$.

2. Треугольник (рис. 1, *б*, L и H — соответственно основание и высота; предполагается, что размеры треугольника в не-

сколько раз больше расстояний между строками сканирования b)

$$\sigma_S^2 \simeq \frac{b^2 L^2}{12}. \tag{7}$$

3. Ромб (рис. 1, *в*, L и H — полудиагонали ромба)

$$\sigma_S^2 = \frac{b^4 L^2}{3H^2}\left[4q_1^2(1-q_1)^2 - q_2^2(1-q_2)^2\right], \tag{8}$$

где $q_1 = q\left(\frac{H}{b}\right)$, $q_2 = q\left(\frac{2H}{b}\right)$.

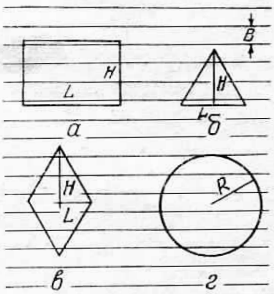

Рис. 1. Эталонные фигуры (*в* — шаг между линиями сканирования).

4. Круг радиуса R (рис. 1, *г*)

$$\sigma_S^2 = 2{,}094\, b^3 R\left[0{,}05815 - q(1-q)\left(\frac{1}{2} - q\right)\right], \tag{9}$$

где $q = q\left(\frac{2R}{b}\right)$.

Во всех этих выражениях отрезки L — параллельны, H — перпендикулярны линиям сканирования; функция $q(x)$ означает дробную часть числа x.

При выводе формул (6)—(9) использованы следующие соотношения, которые можно доказать, например, разложением их правых частей в ряды Фурье:

$$2\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\sin^2 \pi K q}{(\pi K)^2} = q(1-q); \quad (10) \qquad 6\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\sin^2 \pi K q}{(\pi K)^4} = q^2(1-q)^2; \quad (11)$$

$$\frac{3}{2}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\sin \pi K 2q}{(\pi K)^3} = q(1-q)\left(\frac{1}{2} - q\right); \tag{12}$$

$$8\sum_{K=1}^{\infty}\frac{\sin^4 \pi K q_1}{(\pi K)^4} = \frac{4}{3}q_1^2(1-q_1)^2 - \frac{1}{3}q_2^2(1-q_2)^2. \tag{13}$$

Сравнивая выражения (6)—(9), замечаем, что дисперсии существенно зависят от параметра q. Если высота прямоугольника H или полудиагональ H ромба равны целому числу отрезков b (рис. 1), следовательно $q=0$, то дисперсии σ_S^2 этих фигур равны нулю. Для круга дисперсия минимальна при $q=0{,}2113$. Дисперсии максимальны при $q=0{,}5$ для прямоугольника, $q_1=0{,}5$ для ромба и $q=0{,}7887$ для круга. Сопоставим эти фигуры также по их максимальным дисперсиям. Имеем:

1) прямоугольник

$$\sigma_S = \pm \frac{bL}{2}; \tag{14}$$

2) треугольник

$$\sigma_S \cong \pm \frac{bL}{2\sqrt{3}}; \tag{15}$$

3) ромб

$$\sigma_S = \pm \frac{b^2 L}{2\sqrt{3}H}; \tag{16}$$

4) круг

$$\sigma_S = \pm 0{,}472\, b \sqrt{bR}. \tag{17}$$

Результаты расчетов по этим формулам для различных равновеликих фигур приведены в таблице. Из таблицы видно, что наиболее выгодной фигурой из рассмотренных является слегка вытянутый поперек линий сканирования ромб. Если шаг между строками сканирования 0,25 мм, а площадь фигуры более 5 мм², то площадь в среднем может быть измерена точнее, чем 0,2%. Если шаг сканирования увеличить в два раза, то погрешности для ромба возрастут в четыре раза и все же будут меньше, чем для других фигур (в упомянутом выше планиметре имеются два значения шага развертки — 0,265 и 0,53 мм [1, 2]).

Максимальные средние квадратические погрешности δ_s (в %) для различных равновеликих фигур площади S ($b=0{,}25$ мм)

Фигура	S, мм²		
	5	20	80
Прямоугольник, $L=2H$	7,9	4,0	2,0
Квадрат	5,6	2,8	1,4
Прямоугольник, $H=2L$	3,4	2,0	1,0
Треугольник, $L=2H$	6,5	3,2	1,6
Треугольник, $L=H$	4,6	2,3	1,1
Круг	1,3	0,46	0,17
Ромб, $H=L$	0,36	0,09	0,02
Ромб, $H=2L$	0,18	0,05	0,01

Любопытно заметить, что площади треугольников, составляющих ромб, определяются со значительными дисперсиями. На рис. 2 показаны характерные графики погрешностей площадей ромба и составляющих его треугольников, полученные моделированием этих измерений. Как видно, большие погрешности в треугольниках, взаимно компенсируясь, не отражаются на точности измерений ромба в целом.

Не следует брать ромбы слишком вытянутые поперек линий сканирования, так как начнут сказываться погрешности измерений длин отрезков l_i, которые не учитываются формулами (3)—(5). Соотношение длин диагоналей ромба должно быть в два—три раза меньше соответствующего соотношения шагов сканирования вдоль строки и между строками.

Из остальных фигур наиболее подходящей является круг, площадь которого можно измерить точнее, чем площадь равновеликого ему треугольника, квадрата или прямоугольника.

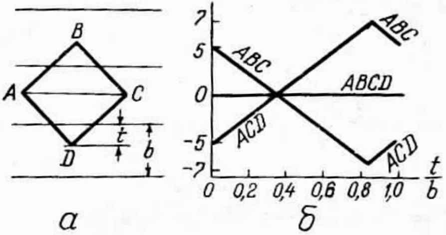

Рис. 2. Погрешности Δ_s измерения площадей треугольников и ромба:

а — расположение фигур на линиях сканирования ($в$=0,5 мм, $AC=BD$=14,85 мм); *б* — графики Δ_s для треугольников и ромба.

Список литературы: 1. *Баламатов Н. Н., Комиссаров В. В., Расположенский Н. А.* Система измерения площадей на картах и аэрофотоснимках по оптическим признакам. — Геодезия и картография, 1978, № 12. 2. *Комиссаров В. В., Расположенский Н. А.* Автоматизация измерения площадей на картах по цветовым признакам. — Вестник МГУ. Сер. География, 1974, № 6. 3. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 2. — М.: Гостехтеориздат, 1956. 4. *Moran P. A. P.* Statistical theory of a high-speed photoelectric planimeter. — Biometrika, London, 1968, v. 55, N 2.

Работа поступила в редколлегию 7 мая 1979 года.