

THE STRICT AND THE APPROXIMATE ADJUSTMENT OF THE LEVEL CIRCUITS

WYRÓWNANIE ŚCISLE I PRZYBLIŻONE CIĄGÓW NIWELACYJNYCH

Wiesław KOSIŃSKI

Katedra Geodezji i Fotogrametrii

Szkoły Głównej Gospodarstwa Wiejskiego

Summary. In this report, I have deduced the formulas (7), (10) and (17) for defining the height mean errors of successive points of the level circuit, with different length of level section. The problem has been resolved by strict and approximate adjustment obtaining the same result. It has been proved that in this case the approximate adjustment gives identical results as the strict one.

Streszczenie. W pracy przedstawiono sposoby wyrównania ciągów niwelacyjnych dwustronnie nawiązanych i zamkniętych o różnych długościach odcinków między wyznaczanymi punktami - rys. 1. Wyprowadzono wzory na określenie dokładności wysokości punktów w ciągach przy ścisłym i przybliżonym wyrównaniu obserwacji. Udowodniono, że wyrównanie przybliżone pozwala uzyskać identyczne dokładności wysokości punktów ciągu jak wyrównanie ścisłe.

1. Wprowadzenie.

Wykonując prace geodezyjne w ramach inżynierii środowiska, jak np. wyznaczanie poziomów wód w rzekach lub pomiary inwentaryzacyjne dla projektowania budowli inżynierskich często zachodzi potrzeba zakładania punktów wysokościowych - reperów roboczych na pewnej powierzchni lub wzdłuż określonej trasy. Zwykle w takim przypadku zakładamy ciągi niwelacyjne dwustronnie nawiązane lub zamknięte. Niezwykle ważna jest umiejętność dostosowywania dokładności pomiaru do warunków wynikających z potrzeb zlecniodawcy. Jest to istotne ze względów ekonomicznych, gdyż jak wiadomo zwiększanie dokładności ponad potrzeby powoduje niepotrzebne powiększanie kosztów roboty geodezyjnej.

W niniejszym opracowaniu rozpatruję ciągi o różnej i jednakowej długości odcinków między punktami wyznaczanymi, przy czym mogą to być ciągi dwustronnie nawiązane - rys. 1, lub tworzące obwód zamknięty, nawiązany do jednego reperu. Dla tak utworzonych

ciągów wyznacz
ścisłym i przybli

Tak jak t
roboczych - Rr
(wyrównania). M
bazujących na ty

1) Wyrównujemy
czym długo
pomierzonych
danego odcinka

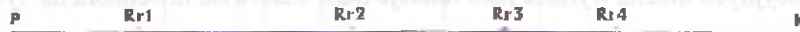
2) Poszczególne
wyrównujemy
na poszczegól
pracochłonne z
równań popraw
wyznaczam do
dokładnościami

3) Wyrównanie o
poszczególnych
odcinkach

Możliwość
bardzo potrzebna
realizacji w terenie

2. Dokładność w
wyrównywaniu ci

ciągów wyznaczyłem dokładność określenia poziomu punktów - reperów roboczych, przy ścisłym i przybliżonym wyrównaniu obserwacji.



Rys. 1

Tak jak to pokazano na rys. 1 między reperami P i K założono kilka reperów roboczych - Rr, których wysokości są wyznaczane w procesie pomiaru i obliczeń (wyrównania). Można tu wyróżnić 3 sposoby postępowania przy wykonywaniu obliczeń, bazujących na tych samych pomiarach terenowych:

- 1) Wyrównujemy w sposób ścisły różnice wysokości między poszczególnymi reperami, przy czym długości odcinków niwelacyjnych są dowolne. Obserwacjami są tu sumy pomierzonych różnic wysokości na poszczególnych stanowiskach niwelatora w ramach danego odcinka niwelacyjnego.
- 2) Poszczególne stanowiska traktujemy jako oddzielne odcinki niwelacyjne, które wyrównujemy w sposób ścisły. Obserwacjami są tu różnice wysokości uzyskane z pomiaru na poszczególnych stanowiskach niwelatora. Wyrównanie takie byłoby bardzo pracochłonne ze względu na dużą liczbę stanowisk niwelatora i co zatem idzie, dużą liczbę równań poprawek i równań normalnych. Nie namawiając nikogo do takiego wyrównania, wyznaczam dokładność wysokości reperów z takiego wyrównania aby porównać z dokładnościami uzyskiwanymi przy wyrównaniu sposobem 1)
- 3) Wyrównanie ciągu wykonujemy w sposób przybliżony, rozrzucając poprawki na poszczególnych odcinkach proporcjonalnie do liczby stanowisk niwelatora na tych odcinkach

Możliwość określenia dokładności wysokości punktów w ciągach niwelacyjnych jest bardzo potrzebna przy projektowaniu tych ciągów i doborze sprzętu pomiarowego do ich realizacji w terenie.

2. Dokładność wyznaczania poziomów punktów - reperów roboczych przy ścisłym wyrównywaniu ciągu składającego się z różnej długości odcinków niwelacyjnych.

Wykonując pomiar tym samym niwelatorem i w podobnych warunkach na poszczególnych stanowiskach, możemy przyjąć, że dokładność tego pomiaru w ramach ciągu jest na wszystkich stanowiskach jednakowa. Stąd wagi dla poszczególnych odcinków niwelacyjnych można wyrazić jako funkcje liczb stanowisk niwelatora na tych odcinkach:

$$p_i = \frac{1}{c_i} \quad (1)$$

gdzie: p_i - waga odcinka niwelacyjnego i ,

c_i - liczba stanowisk niwelatora na odcinku niwelacyjnym i .

Równania poprawek dla poszczególnych odcinków niwelacyjnych są następujące:

$$\begin{aligned} -dH_p + dH_1 + l_1 &= v_1 \\ -dH_1 + dH_2 + l_2 &= v_2 \\ &\dots \dots \dots \\ -dH_i + dH_{i+1} + l_{i+1} &= v_{i+1} \\ &\dots \dots \dots \\ -dH_n + dH_k + l_{n+1+k} &= v_{n+1+k} \end{aligned} \quad (2)$$

W ciągu zamkniętym $dH_p = dH_k$, ponieważ dotyczy to tego samego punktu. Dla ciągu dwustronnie nawiązanego zakładam bezbłądność wysokości punktów nawiązania, stąd $dH_p = dH_k = 0$.

Współczynniki przy niewiadomych przemnożone przez odpowiednie pierwiastki z wag odcinków niwelacyjnych tworzą poniższą tabelę:

$$\begin{array}{ccccccc} dH_1 & dH_2 & dH_3 & dH_4 & \dots & & \\ \frac{1}{\sqrt{c_1}} & & & & & & \\ -\frac{1}{\sqrt{c_1}} & \frac{1}{\sqrt{c_2}} & & & & & \\ & -\frac{1}{\sqrt{c_2}} & \frac{1}{\sqrt{c_3}} & & & & \\ & & -\frac{1}{\sqrt{c_3}} & \frac{1}{\sqrt{c_4}} & & & \\ & & & \dots & \dots & & \end{array} \quad (3)$$

Na podstawie powyższych współczynników możemy utworzyć tabelę wyznacznika charakterystycznego układu równań normalnych D :

$$D = \begin{vmatrix} \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} & -\frac{1}{c_2} \\ -\frac{1}{c_2} & \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{c_{i-1}} & \frac{1}{c_{i-1}} + \frac{1}{c_i} & \dots & -\frac{1}{c_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{c_{n-1}} & \frac{1}{c_{n-1}} + \frac{1}{c_n} & \dots & -\frac{1}{c_n} \end{vmatrix}$$

Błąd średni

możemy w zależności

$$m_i = m_0 \sqrt{\frac{D_{ii}}{D}}$$

gdzie: D - wyznacznik

D_{ii} - wyznacznik

wiersza

Wartość wy

kolejne kolumny w

przed znak wyznacznika

dla 2 - giej kolumny

dla 3 - ciej kolumny

dla 4 - tej kolumny

dla i - tej kolumny

W przekształconym

wyznacznika. Do k

pierwszą. Do kolum

otrzymanie w wyzn

Wartością wyznacznika

to wyrażenia:

$$D = \begin{vmatrix} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right) & -\frac{1}{c_2} & & & \\ -\frac{1}{c_2} & \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3}\right) & -\frac{1}{c_3} & & \\ & -\frac{1}{c_3} & \left(\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_4}\right) & -\frac{1}{c_4} & \\ & & -\frac{1}{c_4} & \left(\frac{1}{c_4} + \frac{1}{c_5}\right) & \dots \\ & & & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (4)$$

Błąd średni i-tej niewiadomej wyznaczonej z układu równań obserwacyjnych wyrazić możemy w zależności od błędu średniego pojedynczego spostrzeżenia m_0 wzorem:

$$m_i = m_0 \sqrt{\frac{D_{ii}}{D}} \quad (5)$$

gdzie: D - wyznacznik układu równań normalnych,

D_{ii} - minor wyznacznika D , powstały przez skreślenie i-tej kolumny i i-tego wiersza w wyznaczniku D .

Wartość wyznacznika (4) obliczam w następujący sposób: zaczynając od drugiej, kolejne kolumny wyznacznika mnożę przez odpowiednie wyrażenia i jednocześnie wynoszę przed znak wyznacznika iloczyn odwrotności tych wyrażeń. Są to wyrażenia:

dla 2 - giej kolumny - $\frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2}$

dla 3 - ciei kolumny - $\frac{c_1 + c_2 + c_3}{c_1 c_3}$

dla 4 - tej kolumny - $\frac{c_1 + c_2 + c_3 + c_4}{c_1 c_4}$

dla i - tej kolumny - $\frac{c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \dots + c_i}{c_1 c_i}$

W przekształconym tak wyznaczniku sumuję kolumny, co nie wpływa na wartość wyznacznika. Do każdej kolumny dodaję wszystkie poprzednie. Do kolumny 2 - giej dodaję pierwszą. Do kolumny 3 - ciei dodaję 1 - szą i 2 - gą, itd. Wynikiem takiego działania jest otrzymanie w wyznaczniku powyżej głównej przekątnej wyrażeń o wartościach równych zero. Wartością wyznacznika jest teraz iloczyn wyrażeń znajdujących się na głównej przekątnej. Są to wyrażenia:

w 1 - szej kolumnie - $\frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2}$

w 2 - giej kolumnie - $\frac{c_1 + c_2 + c_3}{c_1 c_3}$

w 3 - ciej kolumnie - $\frac{c_1 + c_2 + c_3 + c_4}{c_1 c_4}$

w i - tej kolumnie - $\frac{c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \dots + c_i}{c_1 c_i}$

Wynikiem mnożenia wyrażeń znajdujących się przed wyznacznikiem i na jego głównej przekątnej jest wartość wyznacznika D.

$$D = \frac{c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \dots + c_i}{c_1 c_2 c_3 c_4 \dots c_i} \quad (6)$$

Podobnie postępując wyznaczam wartości podwyznaczników D_{ii} .

Wyznaczenie ogólnych wartości wyznacznika D i jego podwyznaczników D_{ii} pozwoliło mi na sformułowanie wzoru (7) na $m_{H(i)}$ - błąd średni poziomu i-tego punktu wyrównywanego ciągu.

$$m_{H(i)} = m_{\Delta h} \sqrt{\frac{\sum_p^i c \sum_i^k c}{\sum_p^k c}} \quad (7)$$

gdzie: $m_{\Delta h}$ - błąd średni pomiaru różnicy wysokości na stanowisku niwelatora,

$\sum_p^i c$ - liczba stanowisk niwelacyjnych od początkowego punktu nawiązania ciągu - P do punktu i,

$\sum_i^k c$ - liczba stanowisk niwelacyjnych od punktu i do końcowego punktu nawiązania ciągu - K,

$\sum_p^k c$ - liczba wszystkich stanowisk niwelacyjnych ciągu.

4. Dokładność wyrównywania odcinka niwelacji

Podobnie pomierzonych poprawek. Zakładając, że jest jednakowa, Współczynniki wyznacznika D,

$$D = \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Związki jego stopień oraz skreślenie i-tego następujące:

$$D = n +$$

$$D_{ii} = i(n$$

Powyższe wysokości punktu

$$m_{H(i)} = n$$

Posługując się siecią ciągów niwelacji

4. Wyrównanie poziomu niwelatora na

4. Dokładność wyznaczenia poziomów punktów - reperów roboczych, przy ścisłym wyrównywaniu ciągu, w przypadku przyjęcia każdego stanowisko niwelatora jako odcinka niwelacyjnego.

Podobnie jak poprzednio dla obliczenia poprawek v do różnic wysokości pomierzonych na poszczególnych stanowiskach niwelatora, należy napisać równania poprawek. Zakładam, że dokładność pomiaru na wszystkich stanowiskach niwelatora w sieci jest jednakowa, stąd nie należy mnożyć poszczególnych równań przez pierwiastki z ich wag. Współczynniki przy niewiadomych z utworzonych równań pozwalają na napisanie wyznacznika D , który ma postać:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & & & \\ & & -1 & \dots & -1 \\ & & & \dots & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad (8)$$

Związki pomiędzy wartością rozpatrywanego wyznacznika D a liczbą n określającą jego stopień oraz między wartością podwyznacznika D_{ii} , którego tabela powstaje przez skreślenie i -tego wiersza i i -tej kolumny w tabeli wyznacznika D a wielkościami n i i są następujące:

$$D = n + 1 \quad (9)$$

$$D_{ii} = i(n + 1 - i) \quad (10)$$

Powyższe zależności pozwalają na napisanie wzoru na określenie błędu średniego wysokości punktów ciągu niwelacyjnego:

$$m_{H(i)} = m_{\Delta h} \sqrt{\frac{i(n+1-i)}{n+1}} \quad (11)$$

Posługując się tym wzorem możemy określić błąd średni wysokości i -tego punktu sieci ciągów niwelacyjnych o n punktach wyznaczanych.

4. Wyrównanie przybliżone przez rozrzucenie poprawek proporcjonalnie do liczby stanowisk niwelatora na poszczególnych odcinkach niwelacyjnych

Przy wyrównaniu przybliżonym rozdziela się odchyłkę całego ciągu na pomiary wykonane na poszczególnych stanowiskach niwelatora. Ponieważ dokładność tych pomiarów jest jednakowa, więc i poprawki wynikłe z niezamknięcia się ciągu powinny być jednakowe. Dla odcinków niwelacyjnych składających się z kilku stanowisk niwelatora poprawkę obliczamy mnożąc poprawkę dla jednego stanowiska przez liczbę stanowisk. W ciągu nawiązanym do punktów: P o wysokości H_p i K o wysokości H_k , poprawkę dla pomierzonej na danym stanowisku różnicy wysokości obliczamy następująco:

$$v = \frac{H_k - H_p - \sum_{i=1}^{n+1} \Delta h_i}{n+1} \quad (12)$$

gdzie: Δh - różnice wysokości pomierzone na poszczególnych stanowiskach,

n - liczbą punktów wyznaczanych ciągu.

Po wprowadzeniu poprawek do różnic wysokości obliczamy wysokości punktów, przy czym wysokość kolejnego i -tego punktu wynosi:

$$H_i = H_p + \sum_{p=1}^i \Delta h + iv \quad (13)$$

$$H_i = H_p + \sum_{p=1}^i \Delta h + \frac{i}{n+1} \left(H_k - H_p - \sum_{i=1}^{n+1} \Delta h \right) \quad (14)$$

$$H_i = H_p + \Delta h_1 + \Delta h_2 + \dots + \Delta h_i + \frac{1}{n+1} \left(H_k - H_p - \Delta h_1 - \Delta h_2 - \dots - \Delta h_{n+1} \right) \quad (15)$$

We wzorach tych wyrównana wysokość punktu H_i przedstawiona została jako funkcja wysokości punktów nawiązania H_p i H_k oraz wielkości obserwowanych - Δh . Błędy średnie wysokości punktów otrzymujemy za pomocą wzoru Gaussa na średni błąd funkcji wielkości obserwowanych. W tym celu obliczamy pochodne cząstkowe wg następujących wzorów:

$$\frac{\partial H_i}{\partial \Delta h_i} = 1 - \frac{i}{n+1} = \frac{n+1-i}{n+1}$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial \Delta h_i} = \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial \Delta h_{i+1}} = -\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial \Delta h_{n+1}} = -\frac{1}{n+1}$$

Mając pow
tego punktu ciągu:

$$m_{H(i)} = \sqrt{\frac{n+1-i}{n+1}}$$

Po
uwagę liczby w
identycznej jak p

$$m_{H(i)} = m_{H(i)}$$

5. Wnioski końcowe

Wyprowa
przedstawionych
dokładności poz
przypadkowy sp
pojedynczych cią
pozwala uzyskać

Błędy śred
przypadku ciąg
zamkniętego są i

$$\frac{\partial H_i}{\partial \Delta h_1} = \frac{n+1-i}{n+1}$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial \Delta h_{n+1}} = -\frac{i}{n+1}$$

$$\dots\dots\dots (16)$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial \Delta h_{n+1}} = -\frac{i}{n+1}$$

Mając powyższe pochodne cząstkowe, wyznaczmy szukany błąd średni wysokości i -tego punktu ciągu:

$$m_{H(i)} = \sqrt{\underbrace{\left(\frac{n+1-i}{n+1}\right)^2 m_o^2 + \dots + \left(\frac{n+1-i}{n+1}\right)^2 m_o^2}_{i - \text{wyrażeń}} + \underbrace{\left(\frac{i}{n+1}\right)^2 m_o^2 + \dots + \left(\frac{i}{n+1}\right)^2 m_o^2}_{(n+1-i) - \text{wyrażeń}}} \quad (17)$$

Po przekształceniach powyższego sformułowania przy którym należy brać pod uwagę liczby występowania poszczególnych wyrażeń, otrzymujemy wzór w postaci identycznej jak przy wyrównaniu ścisłym (wzór 9):

$$m_{H(i)} = m_o \sqrt{\frac{i(n+1-i)}{n+1}} \quad (18)$$

5. Wnioski końcowe.

Wprowadzone wzory: (7), (11) i (18) pozwalają stwierdzić, że niezależnie od przedstawionych sposobów wyrównania ciągu niwelacyjnego, uzyskujemy identyczne dokładności poziomów wyznaczanych punktów ciągu. Nie ma przy tym znaczenia przypadkowy sposób tworzenia odcinków niwelacyjnych. Wyrównanie przybliżone pojedynczych ciągów niwelacyjnych, znacznie mniej pracochłonne od wyrównania ścisłego, pozwala uzyskać takie same dokładności jak wyrównanie ścisłe.

Błędy średnie wysokości punktów jednakowo oddalonych od punktów nawiazania w przypadku ciągów dwustronnie nawiazanych lub punktu nawiazania w przypadku ciągu zamkniętego są identyczne:

Literatura

- [1] Hausbrandt S.: Wzory na błąd średni dowolnego punktu w poligonie typowym i wnioski dotyczące koordynowania dokładności pomiarów katowych i liniowych w poligonie typowym, Geodezja i Kartografia, tom II zeszyt 1, Warszawa 1953 r.
- [2] Hausbrandt S.: Rachunek wyrównawczy i obliczenia geodezyjne, Warszawa 1971 r.
- [3] Kosiński W.: Dokładność wyznaczania wysokości punktów w pojedynczych ciagach niwelacyjnych, Przegląd Naukowy Wydziału Melioracji i Inżynierii Środowiska, zeszyt 6, Warszawa 1994 r.
- [4] Skórczyński A.: Rachunek Wyrównawczy, PPWK Warszawa 1985 r.
- [5] Wysocki.: Geodezja z Fotogrametrią, Warszawa 1991 r.

ДО ПИТАННЯ ЕТАЛОНУВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ТРИГОНОМЕТРИЧНОГО НІВЕЛЮВАННЯ

Тарас Радьо

Український державний лісотехнічний університет

(Львів, Україна)

Проблема еталонування результатів тригонометричного нівелювання (ТН) - це приведення всіх даних ТН до початку прийнятої системи відліку висот (ППСВВ) в тій чи іншій країні, або співдружності держав [3,4,5]. Проблема еталонування ТН полягає в тому, щоб місце нуля (M_0) і місце зеніту (M_z) будь-якої точки краєвої поверхні Землі, а також перевищення і висоти точок, були приведені до ППСВВ.

Нехай в ППСВВ (для країн СНД - Балтійська система висот) сила притягання, відцентрова сила і прискорення вільного падіння (ПВП) будуть відповідно $\bar{F}_0$, $\bar{Q}_0$ і $\bar{g}_0$. При пересуванні на краєвій поверхні планети, обертання Землі і рельєф її поверхні сприяють зміні $\bar{F}_0$, $\bar{Q}_0$ і $\bar{g}_0$ на $\pm \Delta \bar{F}_n$, $\pm \Delta \bar{Q}_n$ і $\pm \Delta \bar{g}_n$ [3,5].

Кутова величина відхилення $\bar{g}_n$ від $\bar{g}_0 - \zeta''$ (відхилення вискової лінії (ВЛ) для будь-якої паралелі Землі) буде визначатися за формулою [5]: