УДК 528.281

А. В. БУТКЕВИЧ, М. А. НАДЕЙКИНА

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИБЛИЖЕННОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ АЗИМУТА ПОЛЯРНОЙ

1. Точные формулы для вычисления азимута Полярной. Для точного вычисления азимута a_N Полярной звезды используют следующую формулу [1]:

$$\operatorname{tg} a_N = \frac{\operatorname{tg} \Delta_N \sec \varphi \sin t_N}{1 - \operatorname{tg} \Delta_N \operatorname{tg} \varphi \cos t_N}, \tag{1}$$

где $\Delta_N = 90° - \delta_N$; $t_N = s - a_N = T + u - a_N$.
В логарифмическом виде строгая формула для вычисления записывается

$$\lg \operatorname{tg} a_N = \lg [\operatorname{tg} \Delta_N \sec \varphi \sin t_N \cdot \nu], \tag{2}$$

где

$$\nu = \frac{1}{1 - n}; \; n = \operatorname{tg} \Delta_N \operatorname{tg} \varphi \cos t_N. \tag{3}$$

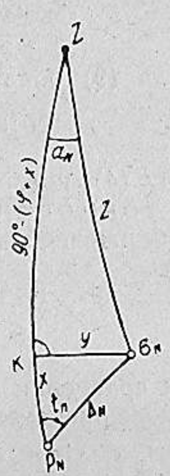
При этом шестизначные таблицы тригонометрических функций или логарифмов, обеспечивают при вычислении a_N точность 0″,01—0″,02.

Строгая формула применяется для вычислений на астрономических пунктах I и II класса обычно в камеральных условиях. Она отличается высокой точностью, но имеет ряд недостатков:

громоздкость вычислений;

необходимость использования семизначных таблиц логарифмов;

неудобство для приближенных вычислений (с точностью 0,1—1′,0).



К выводу формулы для азимута a_N Полярной.

2. Приближенная формула для вычисления азимута Полярной. Из-за указанных недостатков формулы (1) для приближенных вычислений азимута Полярной применяют упрощенную формулу [3]

$$a''_N = \Delta''_N \sin t_N \sec(\varphi + \Delta_N \cos t_N). \qquad (4)$$

В литературе не указано, какую точность она дает, поэтому выведем эту формулу и исследуем ее отброшенные члены.

На рисунке дуга $\overset{\frown}{\sigma_N K}$ перпендикулярна к меридиану и обозначена $\overset{\frown}{\sigma_N K} = y$; $\overset{\frown}{P_N K} = x = f$; $\overset{\frown}{P_N \sigma_N} = \Delta_N = 90° - \delta_N$.

Сначала выведем формулу (4) приближенно. Прямоугольный треугольник $P_N K \sigma_N$ из-за малости его сторон ($<1°$) принимаем за плоский и вычисляем его стороны по формулам плоской тригонометрии [3]:

$$x = \Delta_N \cos t_N; \quad y = \Delta_N \sin t_N. \qquad (5)$$

Для сферического треугольника $KZ\sigma_N$ можно написать

$$\overset{\frown}{KZ} = 90° - (\varphi + x). \qquad (6)$$

Применяя к элементам $90°-(\varphi+x)$, y и a_N формулу Модюи, будем иметь

$$\cos(\varphi+x)=\operatorname{tg} y \operatorname{ctg} a_N. \tag{7}$$

Отсюда получается формула [3]

$$\operatorname{tg} a_N=\operatorname{tg} y \sec(\varphi+x). \tag{8}$$

В широтах меньших 65° угол a_N не превышает 3°, поэтому приближенно можно принять:

$$\operatorname{tg} a_N \simeq \frac{a_N''}{\rho''}, \ \operatorname{tg} y \simeq \frac{y''}{\rho''}. \tag{9}$$

Тогда формула (9) обратится в следующую:

$$a_N''=y''\sec(\varphi+x), \tag{10}$$

или в формулу (4), которую требовалось вывести.

Анализ точности приближенной формулы (4). Точность приближенной формулы (4)

$$a_N''=\Delta_N' \sin t_N \sec h_0, \tag{4'}$$

где

$$h_0=\varphi+\Delta_N \cos t_N, \tag{11}$$

оценим путем сравнения ее с точной формулой, которая получается на основе теоремы синусов

$$\sin a_N=\sin\Delta_N \sin t_N \sec h. \tag{12}$$

Разложим $\sin a_N$ и $\sin\Delta_N$ в ряд Маклорена, ограничившись при этом двумя его членами. Тогда

$$\left(a_N-\frac{a_N^3}{6}\right)=\left(\Delta_N-\frac{\Delta_N^3}{6}\right)\sin t_N \sec h \tag{13}$$

или

$$a_N=\Delta_N \sin t_N \sec h-\frac{\Delta_N^3}{6}\sin t_N \sec h+\frac{a_N^3}{6}=$$

$$=y\sec h-\frac{\Delta_N^3}{6}\sin t_N \sec h+\frac{\Delta_N^3}{6}\sin^3 t_N \sec^3 h=$$

$$=y\sec h-\frac{\Delta_N^3}{6}\sin t_N \sec h\,(1-\sin^2 t_N \sec^2 h)=a_N^0-\delta a_N,$$

где

$$\delta a_N=\frac{\Delta_N^3}{6}(\sin t_N \sec h-\sin^3 t_N \sec^3 h). \tag{14}$$

Найдем максимум ошибки δa_N путем дифференцирования формулы (14) по t и h при $\Delta_N \approx 50'$ ($\approx 1:68$). Пусть

$$f(t, h)=\sin t \sec h-\sin^3 t \sec^3 h, \tag{15}$$

тогда
$$f'(t,\ h)_t = \cos t \sec h - 3\sin^2 t \cos t \sec^3 h = 0.$$

Отсюда $\quad \cos t \sec h = 0$ или, $1 - 3\sin^2 t \sec^2 h = 0. \qquad (16)$

При дифференцировании (15) по h получаем
$$1 - 3\sin^2 t \sec^2 h = 0. \qquad (17)$$

Теперь найдем экстремальное значение $\sin t \sec h - \sin^3 t \sec^3 h$. Из (16) имеем
$$\sin^2 t \sec^2 h = 0{,}33.$$

Отсюда
$$\sin t \sec h = 0{,}57$$
и
$$\sin^3 t \sec^3 h = 0{,}19.$$

Подставляя $\sin t \cdot \sec h$ и $\sin^3 t \cdot \sec^3 h$ в формулу (14), получим
$$\delta a''_{N\max} \approx \frac{\Delta''^3}{6\rho''^2}(0{,}57 - 0{,}19) \approx 0'',11 \cdot 0{,}38 \approx 0'',04.$$

Мы определили максимальную погрешность, вызываемую влиянием замены $\sin a_N$ в формуле (12) на a_N и $\sin \Delta_N$ на Δ_N.

Теперь исследуем погрешность замены в формуле (4) h на
$$h_0 = \varphi + \Delta_N \cos t_N.$$

Имея приближенную формулу
$$a_N = \Delta_N \sin t_N \sec h,$$
получим
$$da_N = \Delta_N \sin t_N \cdot d \sec h, \qquad (18)$$
или
$$da_N = \Delta_N \sin t_N \operatorname{tg} h \sec h\, dh. \qquad (19)$$

Но, так как более строгая формула имеет вид [3]
$$h = \varphi + \Delta_N \cos t_N - \frac{\Delta_N^2}{2} \operatorname{tg} h \sin^2 t_N, \qquad (20)$$
то
$$dh = h_0 - h = \frac{\Delta_N^2}{2} \operatorname{tg} h \sin^2 t_N, \qquad (21)$$
и
$$da''_N = \frac{\Delta''^3_N}{2\rho''^2} \operatorname{tg}^2 h \sec h \sin^3 t_N. \qquad (22)$$

Определим коэффициент $\dfrac{\Delta''^3_N}{2\rho^{2''}} \approx 0'',32.$

При $h_N = 60°$ и $t_N = 90°$ по формуле (22) получается
$$da''_N \approx 0'',32 \cdot 3 \cdot 2 \approx 1'',9.$$

Значит, ошибка формулы (4) будет равна
$$m = \sqrt{1'',9^2 + 0'',04^2} \approx \pm 2''.$$

Но надо еще рассчитать ошибку вычислений (ошибку таблиц), то есть ошибку, вызываемую наличием определенного числа знаков в таблице.

Из формулы (4) находим

$$da_N'' = d\Delta_N'' \sin t_N \sec\varphi + \Delta_N'' \sin t_N \, d\sec\varphi + \Delta_N'' \sec\varphi \, d\sin t_N, \quad (23)$$

или при вычислении по пятизначным натуральным таблицам и при

$$t_N = 90^\circ \text{ и } h_N = 60^\circ, \; d\Delta_N' = 0'',05,$$

получим $\quad d\sec\varphi = 0{,}00005, \; d\sin t_N = 0{,}000005,$

$$da_N'' = 0'',05 \cdot 1 \cdot 2 + 3'' \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10^{-5} + 3'' \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 5,$$

$$m_a = \sqrt{0'',10^2 + 0'',15^2 + 0'',03^2} \approx \pm 0'',18.$$

При вычислении по пятизначным натуральным таблицам $m_a \approx 0'',2$.

Если пользоваться пятизначными логарифмическими таблицами, то

$$m_a'' = \frac{m_{\lg a}}{\mu} \cdot a'' \text{ и при } m_{\lg a} = 0{,}5 \cdot 10^{-5}.$$

получится

$$m_{a_5}'' = \frac{0{,}5 \cdot 6000''}{0{,}43 \cdot 10^5} \approx \pm 0'',07 \approx \pm 0'',1.$$

Поэтому вычисления азимута Полярной с логарифмами вдвое точнее. Общая погрешность при пятизначных вычислениях будет равна

$$m_{a_5}'' = \sqrt{1'',9^2 + 0'',2^2} \approx \pm 2''.$$

При четырехзначных вычислениях она составит

$$m_{a_4}'' = \sqrt{1'',9^2 + 1'',8^2} \approx \pm 2'',6 \approx \pm 2'' - 3''.$$

Значит, ошибка формулы (4) $m_a < 2''$ соответствует ошибке четырехзначных таблиц.

Поэтому, если требуется точность вычисления не выше 2—3″, то можно использовать приближенную формулу (4) и четырехзначные натуральные или логарифмические таблицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов А. Н. Геодезическая астрономия. М., «Недра», 1966.
2. Цветков К. И., Полак И. Ф. Курс сферической и общей астрономии. М., Геодезиздат, 1945.
3. Цветков К. А. Практическая астрономия. М., Геодезиздат, 1951.

Работа поступила в редколлегию 23 декабря 1974 года. Рекомендована кафедрой высшей геодезии и астрономии Львовского политехнического института.