

УДК 528.412

П. И. БАРАН, С. Г. РАДОВ

## К ВОПРОСУ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ОБРАТНОЙ УГЛОВОЙ ЗАСЕЧКИ

Задача определения четвертой точки по трем данным, названная по имени французского математика задачей Потенота, имеет много различных решений. На основе графического решения способом Бесселя сделан вывод [2], что наиболее точно четвертая точка определяется внутри исходного треугольника. Менее надежны случаи, когда определяемая точка находится вне такого треугольника против одной из его сторон. Если же все точки лежат на одной окружности, тогда решить задачу невозможно.

Оптимальной схемой обратной засечки является случай, когда определяемая точка находится вблизи центра вписанной в исходный треугольник окружности [3]. Величину погрешности положения точки, определяемой задачей Потенота, можно найти путем графических построений [1, 5] или вычислить аналитически [4, 6]. При наличии избыточных измерений оценка точности засечки может выполняться по коэффициентам нормальных уравнений [5].

Как видим, вопрос о точности задачи Потенота в геодезической литературе рассматривался неоднократно, но полного и наглядного представления о характере изменения погрешности определяемого пункта нет. Поэтому довольно часто на практике отказываются от применения простой и надежной засечки и производят привязочные и другие работы более трудоемкими методами.

При решении задачи Потенота погрешность определения положения пункта (рис. 1) за влияние погрешностей измерений вычисляется по формуле из работы [6]

$$M_{\text{изм}} = \frac{m_{\beta_{\text{изм}}} S_2}{\rho'' \sin \tau_2} \sqrt{\left(\frac{S_1}{b_3}\right)^2 + \left(\frac{S_3}{b_1}\right)^2}, \quad (1)$$

где  $\tau_2 = w_2 + \beta_1 + \beta_3$ ;  $S_1, S_2, S_3$  — расстояния между определяемым и исходными пунктами;  $b_1$  и  $b_3$  — расстояния между исходными пунктами 2—3 и 1—2;  $\beta_1$  и  $\beta_3$  — измеряемые углы;  $w_2$  — угол исходного треугольника;  $m_{\beta_{\text{изм}}}$  — погрешность измерения углов. На величину  $M_{\text{изм}}$  влияет не только конфигурация засечки, но и комбинация измеряемых углов. Для выбора выгодней-

иной комбинации следует определить градиенты углов, так как измерению в обратной однократной засечке подлежат углы, градиенты которых меньше. Этот способ удобно применять при графической оценке точности засечки, когда известны стороны инвертного треугольника. Более просто этот вопрос решается графически. Продолжим линии, проходящие через исходные

и определяемый пункты, до пересечения с описанной вокруг данного треугольника окружностью (рис. 1). В получном треугольнике  $1'2'3'$  стороны пропорциональны градиентам углов, причем сторона  $1'2'$  пропорциональна градиенту угла  $\beta_3$  ( $1'2' \sim g_{\beta_3}$ ),  $2'3' \sim g_{\beta_1}$  и  $1'3' \sim g_{\beta_2}$ . Для доказательства этого свойства сто-

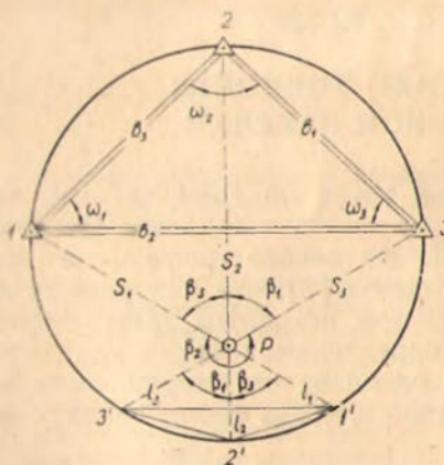


Рис. 1. Схема обратной угловой засечки.

рон  $\Delta 1'2'3'$  из подобия треугольников  $12P$  и  $1'2'P$ ,  $23P$  и  $2'3'P$ ,  $13P$  и  $1'3'P$  найдем отношения соответствующих сторон

$$\frac{S_1}{l_1} = \frac{S_2}{l_2}; \quad \frac{S_2}{l_3} = \frac{S_3}{l_2}; \quad \frac{S_1}{l_3} = \frac{S_3}{l_1}, \quad (2)$$

откуда получим

$$S_1 l_1 = S_2 l_2 = S_3 l_3 = \text{const}. \quad (3)$$

Этим же свойством обладают и градиенты направлений ( $g = \rho''/S$ )

$$S_1 g_1 = S_2 g_2 = S_3 g_3 = \rho'' = \text{const}. \quad (4)$$

Следовательно, отрезки  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$  пропорциональны соответственно градиентам  $g_1$ ,  $g_2$  и  $g_3$ . Сравнивая методику построения инвертного треугольника для обратной угловой засечки [5] и  $\Delta 1'2'3'$  (рис. 1), убеждаемся, что стороны последнего  $2'3'$ ,  $1'3'$  и  $1'2'$  пропорциональны градиентам углов  $g_{\beta_1}$ ,  $g_{\beta_2}$  и  $g_{\beta_3}$ . Поэтому измерению подлежат углы, лежащие в треугольниках  $1'2'P$ ,  $2'3'P$  и  $1'3'P$  против меньших сторон  $\Delta 1'2'3'$ . Длина общей стороны этих углов принимается в качестве  $S_2$  при вычислении по формуле (1). Например, для обратной засечки, показанной на рис. 1, в  $\Delta 1'2'3'$  меньшими являются стороны  $1'2'$  и  $2'3'$ . Поэтому следует измерять углы  $\beta_3$  и  $\beta_1$ , а общей стороной является линия  $2P$ .

Для изучения характера изменения погрешности  $M_{\text{изм}}$  в зависимости от конфигурации засечки построены линии равных

погрешностей (изоляпсы \*), подписи которых даны в сантиметрах, при  $t_B = 1''$ ,  $b_1 = b_2 = b_3 = 8,66$  км (рис. 2). Как видим, наиболее точно определяется четвертая точка внутри исходного треугольника. При приближении точки к «опасной окружности», проведенной через исходные пункты, погрешность возрастает до бесконечности. При этом уверенное определение точки обесцвечивает уход от «опасной окружности» на 10% ее радиуса. За «опасной окружностью» погрешность вначале уменьшается, достигает вторых минимумов и вновь безгранично увеличивается. Минимумы второй группы различны в различных точках, но всегда больше абсолютного минимума, который находится вблизи центра вписанной в исходный треугольник окружности. Анализ подобных графиков для других исход-

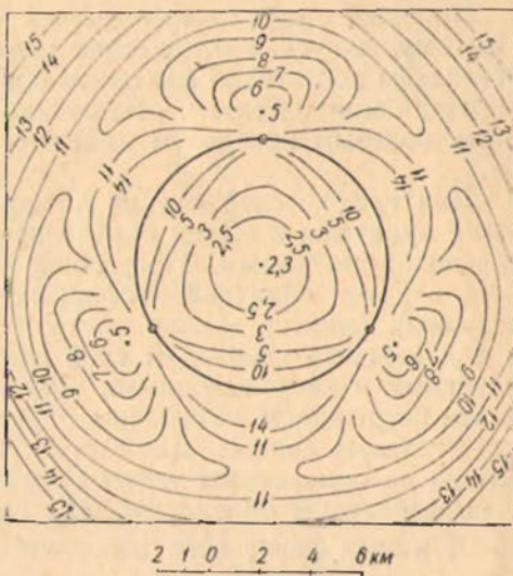


Рис. 2. График изоляпсов для обратной угловой засечки при  $t_B = 1''$  и  $b_1 = b_2 = b_3 = 8,66$  км.

ных треугольников показывает, что при отклонении исходного треугольника от равностороннего абсолютный минимум вместе с центром вписанной окружности приближается к вершине большего угла треугольника. Локальный минимум за «опасной окружностью» также смещается к этой вершине. Для надежного определения точки, расположенной против меньших сторон исходного треугольника, достаточно отойти от «опасной окружности» на 5—10% ее радиуса. Если исходные пункты расположены на одной прямой, то зона благоприятных измерений находится в пределах окружности с радиусом, примерно равным меньшему базису, и центром в средней точке, исключая случаи, когда определяемая точка расположена в створе исходных пунктов или вблизи него.

Степень приближения искомой точки к «опасной окружности» определяется отклонением угла  $\tau_2$  от  $180^\circ$

$$\Delta R = \frac{\Delta\tau_2 \cdot S_1 S_3}{\rho}, \quad (5)$$

где  $\Delta\tau_2 = 180^\circ - \tau_2$ ;  $\rho = 57,3^\circ$ . Приняв допустимым удаление точки

\* Изоляпсы — от гр. *isos* (равный) + лат. *lapsus* (погрешность).

от « опасной окружности» на 10% ее радиуса [6], то есть

$\Delta R = \frac{R}{10}$ , при  $R = \frac{b_2}{2 \sin \omega_2}$  получим

$$\Delta \tau_2 \approx 2,9^\circ \frac{b_2^2}{S_1 S_3 \sin \omega_2}. \quad (6)$$

При различных схемах засечек  $\Delta \tau_2$  изменяется от 10 до  $30^\circ$ . Поэтому, допуская отклонение угла  $\tau_2$  от  $180^\circ$  на  $20-30^\circ$ , мы обеспечим достаточно надежное определение точки задачей Потенота. Таким образом, отклонение угла  $\tau_2$  от  $180^\circ$  может служить полевым контролем надежности обратной угловой засечки.

Для графической оценки точности засечек с двумя исходными пунктами и одним определяемым с успехом применяются графики-номограммы. Построение аналогичных графиков для всех случаев обратной засечки невозможно, так как из трех исходных пунктов можно построить множество треугольников и для каждого необходим свой график. При равностороннем и близкими к нему исходными треугольниками по рис. 2 можно найти погрешность положения определяемого пункта и при других исходных данных. Для этого необходимо способом А. П. Болотова по измеренным углам найти положение точки на рис. 2 и по изоляпсам определить  $M'_{изм}$ . Измерив расстояние  $S_2'$  на рис. 2 и зная фактическое значение  $S_2$ , находим

$$M_{изм} = \frac{m_{\beta_{изм}}}{1''} \cdot \frac{S_2}{S_2'} M'_{изм}, \quad (7)$$

где  $m_{\beta_{изм}}$  — погрешность измерения углов в секундах;

$M_{изм}$  — погрешность положения определяемого пункта за влияние погрешностей измерений, выраженная в сантиметрах.

Для некоторых исходных треугольников построены изоляпсы  $M'_{изм}$  (рис. 3), причем для удобства графической оценки точности задачи Потенота принято  $m_\beta = 1''$  и  $S_2' = 1$  км. Определив, как и в предыдущем случае,  $M'_{изм}$  по графику, на котором углы исходного треугольника близки к углам фактического, находим погрешность положения искомого пункта по формуле (7), счи-тая  $S_2' = 1$  км.

С помощью этих графиков (рис. 2, 3) можно решить и обратную задачу: найти необходимую точность угловых измерений и установить зону благоприятных измерений при заданной погрешности положения определяемого пункта.

При оценке точности задачи Потенота по формуле (1) не учитывается действие погрешностей исходных пунктов. Рассмотрим степень их влияния на точность обратной угловой засечки,

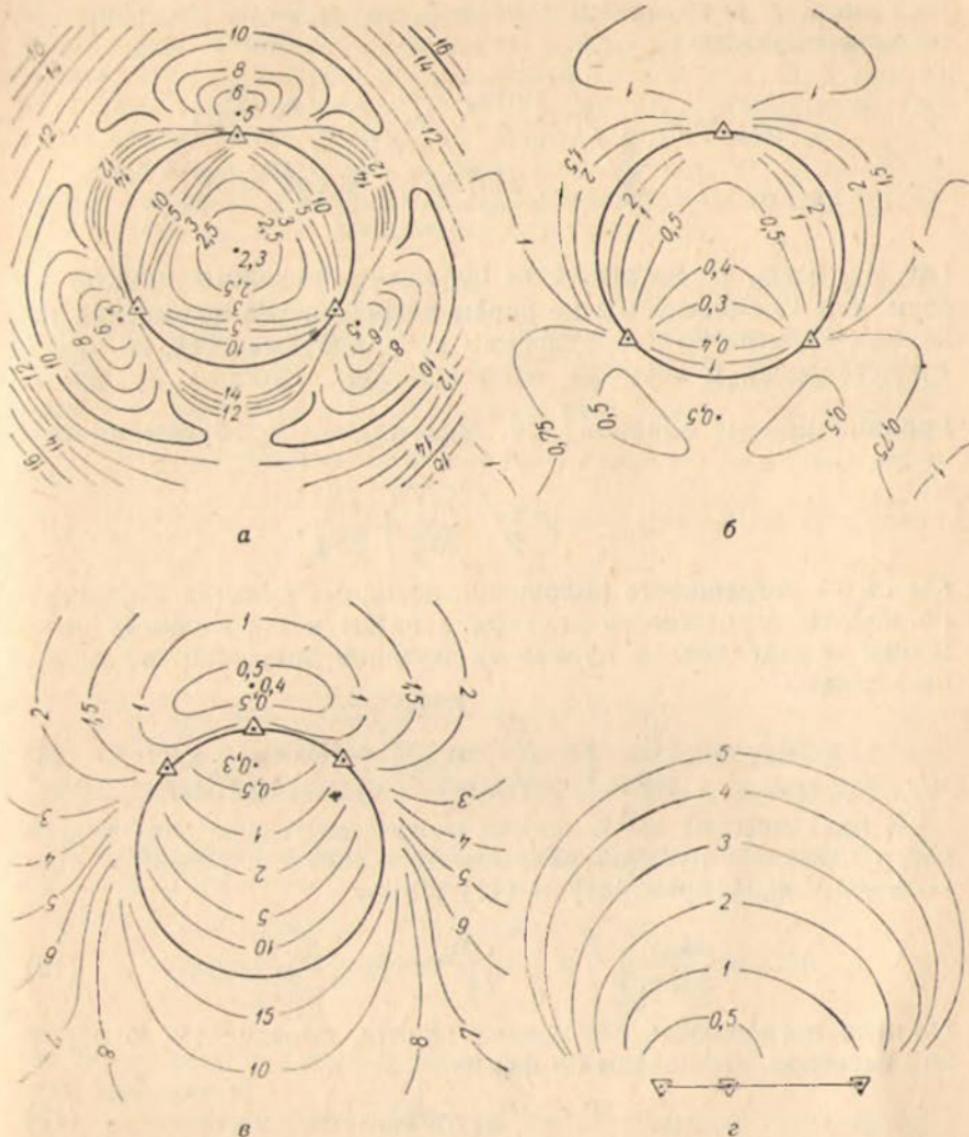


Рис. 3. Графики изоляпс для обратной угловой засечки при  $m_\beta = 1''$  и  $S_2 = 1$  км.

для чего выразим угол  $\beta_1$  через координаты исходных пунктов (рис. 1)

$$\beta_1 = \alpha_3 - \alpha_2 = \arctg \frac{y_3 - y_p}{x_3 - x_p} - \arctg \frac{y_2 - y_p}{x_2 - x_p}, \quad (8)$$

где  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$  — дирекционные углы линий  $P2$  и  $P3$ ;  $x_p, y_p; x_2, y_2; x_3, y_3$  — координаты определяемого и соответствующих исходных пунктов. Взяв частные производные функции (8) по переменным  $x_2, y_2, x_3$  и  $y_3$ , после преобразований получим формулу

погрешности в измеряемом угле  $\beta_1$  за влияние погрешностей исходных пунктов

$$m_{\beta_{\text{исх}}} = \rho'' \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha_2 \cdot m_{x_1}^2 + \cos^2 \alpha_2 \cdot m_{y_1}^2}{S_2^2} + \frac{\sin^2 \alpha_3 \cdot m_{x_2}^2 + \cos^2 \alpha_3 \cdot m_{y_2}^2}{S_3^2}}, \quad (9)$$

где  $m_{x_i}$  и  $m_{y_i}$  — погрешности положения исходных пунктов по осям  $X$  и  $Y$ . Обычно мы не знаем погрешностей положения исходных пунктов по направлениям координатных осей, но имеем представление о точности этих пунктов. Поэтому, учитывая

принцип равных влияний (т. е.  $m_{x_i} = m_{y_i} = \frac{m_i}{\sqrt{2}}$ ), будем иметь

$$m_{\beta_{\text{исх}}} = \rho'' \sqrt{\frac{m_2^2}{2S_2^2} + \frac{m_3^2}{2S_3^2}}, \quad (10)$$

где  $m_i$  — погрешность положения исходных пунктов. Аналогично найдем погрешность угла  $\beta_3$ , а затем и погрешность положения определяемого пункта за влияние погрешностей исходных данных

$$M_{\text{исх}} = \frac{S_2}{\rho'' \sin \tau_2} \sqrt{\left(\frac{S_1}{b_3} m_{\beta_{\text{исх}}}\right)^2 + \left(\frac{S_3}{b_1} m_{\beta_{\text{исх}}}\right)^2}. \quad (11)$$

В практических вычислениях можно допускать, что погрешности исходных пунктов равны между собой. Принимая  $m_1 = m_2 = m_3 = m_{\text{исх}}$ , преобразуем (11) к виду

$$M_{\text{исх}} = \frac{m_{\text{исх}}}{\sin \tau_2} \sqrt{1 + \frac{S_1 S_2}{b_3^2} \cos \beta_3 + \frac{S_2 S_3}{b_1^2} \cos \beta_1}. \quad (12)$$

Полную погрешность положения пункта, определяемого обратной засечкой, вычисляем по формуле

$$M^2 = M_{\text{изм}}^2 + M_{\text{исх}}^2. \quad (13)$$

Анализ формулы (13) показал, что степень влияния погрешностей исходных пунктов на погрешность положения определяемого пункта зависит от соотношения  $m_{\beta_{\text{исх}}}$  и  $m_{\beta_{\text{изм}}}$ . Увеличение погрешности положения определяемого пункта в зависимости от соотношения величин  $m_{\beta_{\text{исх}}}$  и  $m_{\beta_{\text{изм}}}$  таково, что при  $m_{\beta_{\text{исх}}} \leqslant 0.5 m_{\beta_{\text{изм}}}$  можно пренебречь погрешностями исходных пунктов.

Анализ точности обратной угловой засечки показывает, что при благоприятном расположении определяемого и исходных пунктов ее можно применять для передачи координат на строительные монтажные горизонты, привязки к пунктам настенной

полигонометрии, съемочного обоснования в городах и на промышленных площадках, привязки плановых опознавательных знаков государственной геодезической сети и т. д. Для надежного предотвращения грубых погрешностей и повышения точности определения положения пункта следует измерять углы на дополнительные исходные пункты или создавать сети из обратных засечек, в которых углы измеряются не только на исходные пункты, но и на смежные определяемые.

**Список литературы:** 1. Аладжалов Ю. А. Определение ошибки привязки опознавателей обратными засечками. — Геодезия и картография, 1956, № 2. 2. Витковский В. В. Топография. — М.: 1928. 3. Иванов Н. И. К вопросу оценки точности обратной засечки. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1966, вып. 4. 4. Никифоров Б. И. Точность геодезического определения точки решением задачи Потенота (по двум углам). — Тр. Гидрограф. ин-та Главсевморпути. Л., 1939, вып. 1. 5. Справочник геодезиста. — М.: Недра, 1975. 6. Справочник по инженерной геодезии. — Киев: Вища школа, 1978.

Статья поступила в редакцию 18.06.80