Список литературы: 1. *Гилл Ф., Мюррей У.* Ньютоновские методы решения задач оптимизации при линейных ограничениях. — В кн.: Численные методы условной оптимизации. М.: Мир, 1977. 2. *Конусов В. Г.* О критериях точности плановых опорных геодезических сетей. — Тр. НИИГАиК, 1969, вып. 23. 3. *Проворов К. Л.* Расчет точности измеренных величин в геодезической сети. — Геодезия и картография, 1974, № 6. 4. *Тамутис З. П.* Оптимальные методы проектирования геодезических сетей. — М.: Недра, 1979. 5. *Box M. J.* A comparison of several current optimization methods and the use of transformations in constrained problems. — The Computer Journal, 1966, 9, N 1. 6. *Dupraz H., Niemeier W.* Un critère pour l'analyse des réseaux géodésique de controle. — Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, 1977, 77, № 4. 7. *Fox R. L., Kapoor M. P.* Rates of change of eigenvalues and eigenvectors. — AIAA Journal, 1968, 6. № 12. 8. *Greenstadt J.* On the relative efficiencies of gradient methods. — Mathematics of Computation, 1967, 21, № 99. 9. *Schmitt G.* Gewichtsoptimierung bei Mehrpunkteinschaltung mit Strekkenmessung. — Allegemeine Vermessungs—Nachrichten, 1978, 85, № 1.

Статья поступила в редколлегию 17. 06. 80

УДК 528.1

М. Д. ГЕРАСИМЕНКО

ОБ ОБУСЛОВЛЕННОСТИ МАТРИЦ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ УРАВНИВАНИИ СВОБОДНЫХ И НЕСВОБОДНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

В практике уравнительных вычислений хорошо известен факт, когда при уравнивании геодезических сетей, содержащих большое число исходных пунктов, параметрический способ обеспечивает лучшую обусловленность матриц нормальных уравнений по сравнению с коррелатным. Обратное относится к уравниванию свободных сетей.

Такой вывод по результатам экспериментальных исследований сделан, например, в работах [2, 3]. Но достаточно простого и удовлетворительного теоретического доказательства этого явления нами в геодезической литературе не обнаружено. Поэтому рассмотрим следующую задачу: как изменится обусловленность матриц нормальных уравнений двух основных способов уравнивания, если жесткость сети станет другой.

При решении будем считать, что общее число пунктов (число исходных плюс число определяемых пунктов) и число измерений в сети неизменно. Меняться будет лишь соотношение числа исходных и определяемых пунктов.

Решение подобной задачи имеет и важное практическое значение, когда, например, в построенной геодезической сети один или несколько из исходных пунктов по результатам каких-либо исследований приходится считать определяемыми. Причиной этого может быть, например, неудовлетворительная точность координат этих пунктов.

Параметрический способ. При параметрическом уравнивании имеем систему уравнений поправок

$$A_1\delta X_1 + L = V, \tag{1}$$

которой соответствует матрица нормальных уравнений порядка m_1

$$N_2 = A_1^T P A_1. \tag{2}$$

Здесь A_1 — матрица коэффициентов уравнений поправок; P — весовая матрица измерений; δX_1 и V — векторы поправок к необходимым неизвестным и результатам измерений; L — вектор свободных членов.

Если некоторые из исходных пунктов считать определяемыми, число уравнений поправок от этого не изменится, но в формулу (1) добавится член, содержащий поправки к координатам этих новых $\frac{m_2}{2}$ определяемых пунктов:

$$A_1\delta X_1 + A_2\delta X_2 + L = V. \tag{3}$$

Матрица нормальных уравнений будет порядка $m_1 + m_2$ и примет вид

$$\bar{N}_2 = \begin{pmatrix} A_1^T P A_1 & A_1^T P A_2 \\ A_1^T P A_1 & A_2^T P A_2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Учитывая, что сингулярные значения матриц N_2 и $\bar{N}_2$ равны их собственным значениям, к упорядоченным в порядке невозрастания собственным значениям

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{m_1} \text{ и } \bar{\lambda}_1 \geqslant \bar{\lambda}_2 \geqslant \cdots \geqslant \bar{\lambda}_{m_1+m_2}$$

матриц N_2 и $\bar{N}_2$ применима теорема о сингулярных значениях блочных матриц [4], из которой следует:

$$\bar{\lambda}_i \leqslant \lambda_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m_1; \quad \bar{\lambda}_{j+2m_2} \leqslant \lambda_j, \quad j \leqslant m_1 - m_2.$$

Теорема Штурма позволяет получить для собственных значений блочных матриц [1] также неравенства

$$\bar{\lambda}_1 \geqslant \lambda_i \geqslant \bar{\lambda}_{m_1+m_2}, \quad i = 1, 2, \cdots, m_1,$$

из которых следует, что матрица N_2 обусловлена лучше матрицы $\bar{N}_2$, соответствующей менее жесткой сети, так как

$$k(N_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_{m_1}} \leqslant \frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_{m_1+m_2}} = k(\bar{N}_2). \tag{5}$$

Коррелатный способ. При коррелатном уравнивании рассмотрим сначала менее жесткую сеть. Для нее систему условных уравнений поправок порядка r_1 запишем в виде

$$B_1 V + W_1 = 0. \tag{6}$$

Ей соответствует матрица нормальных уравнений

$$N_1 = B_1 P^{-1} B_1^T. \qquad (7)$$

Если, далее, в этой сети некоторые из пунктов, считавшихся определяемыми, сделать исходными, число условных уравнений возрастет на m_2 при неизменном числе измерений, и система условий для более жесткой сети запишется в виде

$$\left.\begin{aligned} B_1 V + W_1 &= 0, \\ B_2 V + W_2 &= 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

Число вновь появившихся условных уравнений m_2 равно изменению числа необходимых неизвестных в сети.

Матрица нормальных уравнений коррелат, соответствующая системе условий (8), равна

$$\bar{N}_1 = \begin{pmatrix} B_1 P^{-1} B_1^T & B_1 P^{-1} B_2^T \\ B_2 P^{-1} B_1^T & B_2 P^{-1} B_2^T \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Аналогично параметрическому уравниванию для собственных значений

$$\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_{r_1+m_2} \quad \bar{\mu}_1 \geqslant \bar{\mu}_2 \geqslant \cdots \geqslant \bar{\mu}_{r_1}$$

матриц N_1 и $\bar{N}_1$ можно написать неравенства:

$$\bar{\mu}_i \leqslant \mu_i, \quad i = 1, 2, \cdots, r_1;$$

$$\bar{\mu}_j \geqslant \mu_{j+2m_2}, \quad j \leqslant r_1 - m_2;$$

$$\mu_1 \geqslant \bar{\mu}_p \geqslant \mu_{r_1+m_2}, \quad p = 1, 2, \cdots, r_1.$$

Из последнего неравенства следует соотношение для чисел обусловленности:

$$k(N_1) = \frac{\mu_1}{\mu_{r_1+m_2}} \geqslant \frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_{r_1}} = k(\bar{N}_1). \qquad (10)$$

Таким образом, уменьшение жесткости геодезической сети может приводить к улучшению обусловленности матрицы нормальных уравнений коррелат и ухудшению обусловленности матрицы нормальных уравнений параметрического способа уравнивания. Этот вывод согласуется с результатами экспериментальных исследований и может служить теоретическим обоснованием стремления уравнивать свободные сети коррелатным способом, а несвободные, содержащие большое число исходных пунктов, — параметрическим.

Список литературы: 1. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969. 2. *Ларин Д. А.* О решении нормальных уравнений. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1957, вып. 1. 3. *Хубларова С. Л.* Оценка обусловленности систем нормальных уравнений. — Тр. ЦНИИГАиК, 1966, вып. 135. 4. *Thompson R. C.* Principal submatrices IX: Interlacing inequalities for singular values of submatrices. — Linear Algebra and Applications, 1972, 5, № 1.

Статья поступила в редколлегию 17. 12. 80

УДК 625.113:528.5

А. В. ГОЖИЙ

К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ДЕТАЛЬНОЙ РАЗБИВКИ КРУГОВОЙ КРИВОЙ СПОСОБОМ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ

Как мы уже отмечали в работе [1], точность построения круговой кривой различными способами наиболее надежно можно характеризовать через погрешность построения радиуса R кривой в отдельных ее точках.

Зависимость между погрешностями δx и δy отложения координат и погрешностью δR построения радиуса кривой можно определить различными способами. В настоящей работе рассмотрен, как нам кажется, наиболее простой из них, который обладает весьма важным достоинством — он пригоден для получения подобных зависимостей при детальной разбивке круговых кривых любыми методами. Сущность этого способа состоит в следующем.

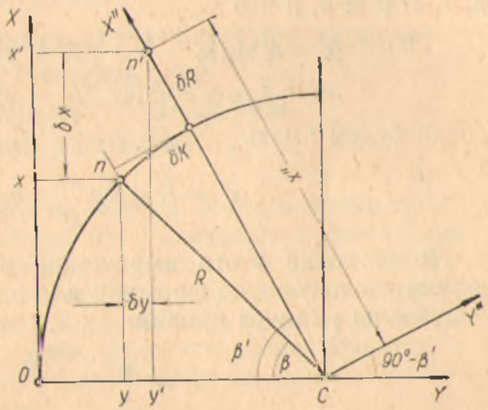

Схема преобразования системы координат.

Из рисунка видно, что при переносе начала системы прямоугольных координат в центр кривой C и повороте ее осей на угол $90° - \beta'$ против хода часовой стрелки (до совмещения оси X с направлением радиуса кривой в точке n') погрешность построения радиуса

$$\delta R = x'' - R. \qquad (1)$$

В равенстве (1) x'' — координата точки n' в измененной системе прямоугольных координат $X''CY''$.