УДК 528.181

Г. Ф. ЛАВРОВ

ОБ УРАВНИВАНИИ ПРОСТЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Рассмотрим решение нормальных уравнений коррелат

$$M_{nn}k_{n1}+W_{n1}=0 \tag{1}$$

с трехдиагональной матрицей коэффициентов этих уравнений

$$M=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & & \\ -a_1 & a_0 & -a_1 & \\ & -a_1 & a_0 & -a_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}, \tag{2}$$

возникающей в простых геодезических цепях.

Квадратические коэффициенты преобразованной по Гауссу матрицы M выражаются в виде обыкновенной дроби [1]

$$[a_i a_i \cdot (i-1)]=[a_0(i-1)]=\frac{N_{i+}}{N_i}, \tag{3}$$

где N — целые числа, последовательные подходящие цепной дроби. Эти числа определяются из рекуррентного уравнения второго порядка

$$N_{i+2}=a_0 N_{i+1}-a_1^2 N_i. \tag{4}$$

Начальными членами последовательности N являются числа:

$$N_0=0,\ N_1=1;\ N_2=a_0.$$

Неквадратические коэффициенты преобразованной матрицы M равны нулю за исключением смежных

$$[a_i a_{i+1}(i-1)]=[a_i a_{i+1}]=-a_1. \tag{5}$$

Получим формулы для выражения коррелат через числа N и a_1. После умножения i-го преобразованного уравнения

$$[a_i a_i (i-1)]\, k_i + [a_i a_{i+1} (i-1)]\, k_{i+1} + [w_i (i-1)] = 0, \quad (6)$$

на числа $N_i (i=1, 2, \ldots, n)$, система эквивалентных нормальных уравнений коррелат примет вид

$$\left.\begin{aligned} N_2 k_1 - a_1 N_1 k_2 \qquad\qquad\qquad\qquad & + N_1 w_1 = 0 \\ N_3 k_2 - a_1 N_2 k_3 \qquad\quad & + N_2 w_2 \cdot 1 = 0 \\ N_4 k_3 - a_1 N_3 k_4 & + N_3 w_3 \cdot 2 = 0 \end{aligned}\right\}. \quad (7)$$

Раскрывая алгорифмы Гаусса для преобразованных свободных членов нетрудно получить выражения

$$\left.\begin{aligned} N_2 w_2 \cdot 1 &= N_2 w_2 + a_1 N_1 w_1 \\ N_3 w_3 \cdot 2 &= N_3 w_3 + a_1 N_2 w_2 \cdot 1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\}. \quad (8)$$

Обозначим левые части равенств (8) через Σ_i и напишем их в общем виде

$$\Sigma_i = N_i w_i \cdot (i-1) = N_i w_i + a_1 \Sigma_{i-1}. \quad (9)$$

Теперь, согласно принятого обозначения, уравнения (7) можно написать в таком общем виде

$$N_{i+1} k_i = a_1 N_i k_{i+1} - \Sigma_i. \quad (10)$$

Далее, по формуле (9) получим выражение текущей суммы через числа N и свободные члены условных уравнений

$$\Sigma_i = N_i w_i + a_1 N_{i-1} w_{i-1} + \cdots + a_i^{i-1} N_1 w_1. \quad (11)$$

Последняя формула разложения Σ_i по свободным членам, может быть представлена двумя способами

$$\Sigma_i = \sum_{j=1}^{i} a_1^{i-j} N_j w_j = \sum_{j=0}^{i-1} a_1^j N_{i-j} w_{i-j}. \quad (12)$$

Для удобства числовых вычислений введем два обозначения

$$t_i = a_1 \frac{N_i}{N_{i+1}}, \quad s_i = \frac{\Sigma_i}{N_{i+1}} \text{ при } i = \overline{1, n}. \quad (13)$$

Наконец формула (10) для вычисления текущей коррелаты примет рабочий вид

$$k_i = t_i k_{i+1} - s_i;\ i = \overline{n, 1}. \quad (14)$$

Рассмотрим практический пример вычисления коррелат при уравнивании простого ряда свободной сети нивелирования из пяти одинаковых квадратов с равноточно измеренными по каждому звену превышениями. В этом случае: $a_0=4$, $a_1=1$.

Числа N_i рекомендуется вычислять с контролем, пользуясь одной и той же реккурентной формулой

$$N_{i+2}+a_1^2 N_i = a_0 N_{i+1}. \qquad (4')$$

При вычислении коррелат все столбцы схемы заполняем сверху вниз, но последний столбец (коррелаты) заполняем снизу вверх, начиная с последней коррелаты k_n, полагая при этом $K_{n+1}=0$:

i	W_i	N_i	$N_i w_i$	Σ_i	s_i	t_i	k_i
1	112	1	12	12	3,00	0,250	—3,453
2	5	4	20	32	2,13	0,267	—1,811
3	—7	15	—105	—73	—1,30	0,268	1,190
4	3	56	168	95	0,45	0,263	—0,412
5	—1	209	—209	—114	—0,146	0,268	0,146
6	—	780	—	—	—	—	—

Числа Σ, s, t и k вычисляем соответственно по формулам (9), (13) и (14).

Для контроля вычисленных коррелат используем сумму нормальных уравнений

$$(a_0-2a_1)[k]-a_1(k_1+k_n)+[w]=0. \qquad (15)$$

В частности для решенного примера $a_0=4$, $a_1=1$, $n=5$, и контрольной суммой будет служить равенство

$$2[k]+(k_1+k_5)+[w]=0. \qquad (16)$$

В пределах точности округления этот контроль удовлетворяется:

$$2(-4{,}34)+(-3{,}31)+12{,}0=+0{,}01.$$

Поправки в измеренные величины (превышения) вычисляются по общеизвестной формуле

$$v_i=\frac{1}{p_i}(a_i k_1+b_i k_2+\ldots). \qquad (17)$$

Для окончательного контроля используется обычное равенство

$$[pvv]=-[kw]. \qquad (18)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лавров Г. Ф. Уравнивание и оценка точности геодезических цепей. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1966, вып. 4.

Работа поступила в редколлегию 4 декабря 1974 года. Рекомендована кафедрой инженерной геодезии Львовского политехнического института.