

ОБ УРАВНИВАНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ИЗ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ

При уравнивании сплошных геодезических сетей из четырехугольников без диагоналей удобно применять групповой метод уравнивания. В первую группу относим условные уравнения фигур. Первичные поправки получаем из формулы

$$\delta_i^1 = -\frac{v_i}{n_i}, \quad (1)$$

где v_i — свободный член уравнения первой группы; n_i — количество углов в фигуре.

Во вторую группу отнесем условные уравнения горизонтов. Матрицу преобразованных коэффициентов нормальных уравнений коррелат можно написать непосредственно по чертежу. Размер и конструкция сети не нарушают закономерности написания элементов матрицы.

В общем виде матрицу нормальных уравнений запишем

$$N \cdot K + W = 0, \quad (2)$$

где N — квадратная матрица, определитель которой не равен нулю; K — матрица-столбец неизвестных коррелат; W — матрица-столбец свободных членов.

Решение системы (2) в общем виде следующее:

$$N^{-1} \cdot N \cdot K = -N^{-1} W, \quad (3)$$

откуда

$$K = -N^{-1} \cdot W. \quad (4)$$

Из выражения (4) следует, что для решения этой задачи необходимо найти обратную матрицу. Но матрица может быть большого порядка и отыскание ее обратной матрицы будет затруднительно. Однако матрица N по своей структуре очень легко разделяется на клетки, в результате чего может быть представлена как симметричная квазитрехдиагональная матрица вида

$$N = \begin{vmatrix} A_{11} & B_{12} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ B_{21} & A_{22} & B_{23} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & B_{n-1, n-2} & A_{n-1, n-1} & B_{n-1, n} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & B_{n, n-1} & A_{nn} \end{vmatrix}, \quad (5)$$

где

$$B_{ij} = B_{ji}. \quad (6)$$

На основании (5) и (6) выражение (2) запишем:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & B & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ B & A_{22} & B & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & B & A_{n-1, n-1} & B \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & B & A_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ K_{n-1} \\ K_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ W_{n-1} \\ W_n \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Подматрицы A и B квадратные трехдиагональные симметричные одинакового порядка

$$A_{ii} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & a_{n-1, n-2} & a_{n-1, n-1} & a_{n-1, n} \\ 0 & & 0 & a_{n, n-1} & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & b_{n-1, n-2} & b_{n-1, n-1} & b_{n-1, n} \\ 0 & & 0 & b_{n, n-1} & b_{nn} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Для упрощения решения используем следующий прием. Приведем матрицу коэффициентов нормальных уравнений коррелят к квазидиагональному виду. Для этого используем клеточную матрицу симметричную и такого же порядка, как исходная матрица. Матрица N действительная симметричная, поэтому для нее существует такая действительная невырожденная матрица G , ортогональная к ней, что

$$N \cdot G = D, \quad (9)$$

где D — диагональная матрица. Матрица G имеет вид

$$G = \begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & & & & G_{2n} \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ G_{n1} & G_{n2} & \cdot & & \cdot & G_{n, n-1} & G_{nn} \end{vmatrix}, \quad (10)$$

$$= \left\| \begin{array}{ccc} W_1 Q_n U_{nn} + \dots + W_n U_{11} Q_{11} & & \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ W_n U_{11} Q_{11} + \dots + W_n Q_{nn} U_{11} & & \end{array} \right\| = 0. \quad (17)$$

Таким образом, исходная система, ее левая часть, приведена к квазидиагональному виду. Этим система (7) расчленилась на подсистемы меньшего порядка, которые можно решать раздельно независимо друг от друга.

Из выражения (17) можно записать формулу определения

13	14	15	16
9 VII	10 VIII	11 IX	12
5 IV	6 V	7 VI	8
1 I	2 II	3 III	4

Сеть из четырехугольников без диагоналей.

коррелат в функции свободных членов

$$- \|BU_{n+1}\| \|K_t\| = \|U_{n+1-t} \sum_{i=1}^{i=t} Q_i W_i + Q_t \sum_{i=t+1}^{i=n} U_{n+1-i} W_i\|, \quad (18)$$

где n порядок блочной матрицы; t — порядковый номер определяемой матрицы.

Введя обозначения в правую часть выражения (18), запишем

$$\|BU_{n+1}\| \cdot \|K_t\| = \|Z\|. \quad (19)$$

Известно, что

$$\|\delta''\| = \|A\| \cdot \|K\|. \quad (20)$$

Учитывая (19), получим

$$\|\delta''\| = \|A\| \cdot \|Z\| \cdot \|BU_{n+1}\|^{-1}. \quad (21)$$

Пример.

Имеем свободную геодезическую сеть из четырехугольников без диагоналей сплошного вида (рис.).

Для этой сети матрица коэффициентов нормальных уравнений коррелат второй группы имеет вид

$$\begin{vmatrix}
 12 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -2 & -12 & -2 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -2 & 12 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 -2 & -1 & 0 & 12 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 \\
 -1 & -2 & -1 & -2 & 12 & -2 & -1 & -2 & -1 \\
 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 12 & 0 & -1 & -2 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 12 & -2 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -2 & 12 & -2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 12
 \end{vmatrix}
 \begin{vmatrix}
 k_1 \\
 k_2 \\
 k_3 \\
 \hline
 k_4 \\
 k_5 \\
 k_6 \\
 \hline
 k_7 \\
 k_8 \\
 k_9
 \end{vmatrix}
 \begin{vmatrix}
 w_1 \\
 w_2 \\
 w_3 \\
 \hline
 w_4 \\
 w_5 \\
 w_6 \\
 \hline
 w_7 \\
 w_8 \\
 w_9
 \end{vmatrix}
 = 0 =$$

$$= \begin{vmatrix}
 A_{11} & B & 0 \\
 \hline
 B & A_{22} & B \\
 \hline
 0 & B & A_{33}
 \end{vmatrix}
 \begin{vmatrix}
 K_1 \\
 \hline
 K_2 \\
 \hline
 K_3
 \end{vmatrix}
 \begin{vmatrix}
 W_1 \\
 \hline
 W_2 \\
 \hline
 W_3
 \end{vmatrix}$$

Для решения этой матрицы найдем матрицу G ортогональную к исходной матрице. Поскольку в сети количество уравнений первой группы, входящее в уравнения второй группы, одинаково, то есть $n=4$, то вычисления упрощаются. Потому что

$$A_{11}=A_{22}=A_{33}, \quad \text{тогда и} \quad A_{11}B^{-1}=A_{22}B^{-1}=A_{33}B^{-1},$$

так как подматрицы B равны между собой.

Для вычисления подматриц матрицы G по формулам (12) необходимо найти матрицу B^{-1} . Для этого используем способ преобразований, описанный в работе [2].

Преобразующие матрицы q получим от деления каждого столбца на элемент главной диагонали:

$$\begin{aligned}
 1. \quad qB=B^{(1)} &= \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}; \\
 2. \quad q^{(1)} \cdot B^{(1)}=B^{(2)} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix};
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 \cdot B^{(2)} \cdot q^{(1)} \cdot q = B^{-1} &= \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Контроль:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{3}{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Определим B^{-1} через рекуррентные последовательности.

Исходная матрица

Рекуррентные последовательности

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix} = B, \quad \begin{aligned} Q_0 = U_0 = 0; & Q_1 = U_1 = 1; \\ Q_2 = U_2 = -2; & Q_4 = U_4 = 4; \\ Q_3 = U_3 = 3. \end{aligned}$$

Ортогональная матрица

$$\begin{vmatrix} Q_{11}U_3 & Q_1U_2 & Q_1U_1 \\ Q_1U_2 & Q_2U_2 & Q_2U_1 \\ Q_1U_1 & Q_2U_1 & Q_3U_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = q;$$

$$d^{-1} \cdot q = B^{-1} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & & \\ & -\frac{1}{4} & \\ & & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{2}{4} & -1 & \frac{2}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{3}{4} \end{vmatrix}.$$

Контроль: $B^{-1} \cdot B = E$.

Найдем элементы матрицы G :

$$1. \quad Q_2 = A_{11}B^{-1}Q_1 - Q_0 = A_{11}B^{-1}, \quad Q_0 = 0, \quad Q_1 = E;$$

$$Q_2 = \begin{vmatrix} 12 & -2 & 0 \\ -2 & 12 & -2 \\ 0 & -2 & 12 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & 8 & -4 \\ 8 & -14 & 8 \\ -4 & 8 & -10 \end{vmatrix};$$

$$2. \quad Q_3 = A_{22}B^{-1}Q_2 - Q_1, \quad Q_2 = A_{11}B^{-1}, \quad A_{11} = A_{22}, \quad Q_3 = Q_2Q_2 - Q_1;$$

$$Q_3 = \begin{vmatrix} -10 & 8 & -4 \\ 8 & -14 & 8 \\ -4 & 8 & -10 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -10 & 8 & -4 \\ 8 & -14 & 8 \\ -4 & 8 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 179 & -224 & 144 \\ -224 & 323 & -224 \\ -144 & -224 & 179 \end{vmatrix};$$

$$3. \quad Q_4 = Q_2Q_3 - Q_2;$$

$$\begin{vmatrix} -10 & 8 & -4 \\ 8 & -14 & 8 \\ -4 & 8 & -10 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 179 & -224 & 144 \\ -224 & 323 & -224 \\ 144 & -224 & 179 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -10 & 8 & -4 \\ 8 & -14 & 8 \\ -4 & 8 & -10 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -4148 & 5712 & 3944 \\ 5712 & -8092 & 5712 \\ 3944 & 5712 & -4148 \end{vmatrix};$$

$$4. \quad B \cdot Q_4:$$

$$BQ_4 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -4148 & 5712 & 3944 \\ 5712 & -8092 & 5712 \\ 3944 & 5712 & -4148 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2584 & 3332 & 2176 \\ 3332 & 4760 & 3332 \\ 2176 & 3332 & 2584 \end{vmatrix};$$

Таким же преобразованиям подвергнется столбец свободных членов

$$G \cdot W = \begin{vmatrix} \frac{G_{11}W_1 + G_{12}W_2 + G_{13}W_3}{G_{21}W_1 + G_{22}W_2 + G_{23}W_3} \\ \frac{G_{31}W_1 + G_{32}W_2 + G_{33}W_3}{G_{21}W_1 + G_{22}W_2 + G_{23}W_3} \end{vmatrix}$$

Учитывая (18), запишем

$$t=1; n=3;$$

$$K_1 = \|U_3Q_1W_1 + Q_1U_2W_2 + Q_1U_1W_3\| \|BU_4\|^{-1};$$

$$t=2; n=3;$$

$$K_2 = \|U_2Q_1W_1 + U_2Q_2W_2 + Q_2U_1W_3\| \|BU_4\|^{-1};$$

$$t=3; n=3;$$

$$K_3 = \|U_1Q_1W_1 + U_1Q_2W_2 + U_1Q_3W_3\| \|BU_4\|^{-1}.$$

Таким образом мы привели систему девятого порядка к решению трех систем третьего порядка, что значительно облегчит и ускорит решение. При этом можно использовать малую вычислительную технику.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кобылин А. И. Уравновешивание системы четырехугольников. — «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1958, № 3.
2. Ладейщикова В. А. Решение систем нормальных уравнений с трехдиагональной матрицей. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1972, вып. 15.

Работа поступила в редколлегию 23 января 1975 года. Рекомендована кафедрой геодезии Харьковского ин-та инженеров коммунального строительства.
