УДК 528.28

А. В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ
Львовский политехнический институт

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ АСТРОНОМИЧЕСКОЙ РЕФРАКЦИИ ПО ФОТОГРАФИЧЕСКИМ НАБЛЮДЕНИЯМ СОЛНЦА

В работе [6] предложен метод определения астрономической рефракции как функции зенитного расстояния при помощи ряда

$$R = C_1 \operatorname{tg} Z - C_3 \operatorname{tg}^3 Z + C_5 \operatorname{tg}^5 Z - \cdots, \tag{1}$$

суть которого заключается в составлении системы уравнений по результатам фотографирования диска Солнца

$$\sum_{l=0}^{n} (-1)^l C_{2l-1} [\operatorname{tg}^{2l-1} Z_{ik} - \operatorname{tg}^{2l-1} Z_{sk}] = \rho - \delta_k \, (k = 1, 2, 3, \cdots, m),$$

где m — номер полученного негатива; n — порядковый номер числа, учитываемого в разложении рефракции; Z_i и Z_s — соответственно зенитное расстояние нижнего и верхнего краев диска Солнца; δ — вертикальный диаметр, выражаемый в секундах дуги соотношением

$$\delta'' = \frac{d}{r} \rho.$$

Здесь d и r — вертикальный и горизонтальный диаметры, измеренные на негативе в линейных единицах; ρ — не искаженный влиянием рефракции горизонтальный диаметр видимого диска в момент экспозиции.

Эту систему уравнений можно записать в виде

$$\sum_{l=0}^{n} (-1)^l C_{2l-1} \left[\operatorname{tg}^{2l-1}\left(Z_k + \frac{D}{2}\right) - \operatorname{tg}^{2l-1}\left(Z_k - \frac{D}{2}\right) \right] = D\left(1 - \frac{d_k}{r}\right), \tag{2}$$

где $\frac{D}{2}$ — радиус не искаженного влиянием рефракции видимого диска Солнца; Z_k — зенитное расстояние центра Солнца в момент экспозиции с номером k, т. е.

$$Z_{ik} = Z_k + \frac{D}{2} \text{ и } Z_{sk} = Z_k - \frac{D}{2};$$

n — порядковый номер коэффициента в разложении (1), и решить ее в случае избыточного числа уравнений методом наи-

меньших квадратов относительно искомых коэффициентов C_{2l-1}. Очевидно, наибольший интерес представляет отыскание коэффициента C_1, обычно называемого постоянной рефракции.

Для практического применения этого метода следует предварительно решить следующие вопросы:

1. Каково достаточное количество удерживаемых коэффициентов разложения в выражении (1)?

2. При каких условиях решение системы уравнений (2) будет устойчивым?

Число коэффициентов C_{2l-1}, определяемое данным методом, зависит от точности значений измеряемых величин (горизонтального и вертикального диаметров фотоизображения Солнца) и диапазона зенитных расстояний, в котором разложение (1) — сходящийся ряд.

Конкретные виды разложения ряда (1) [2, 7, 8] позволяют заключить, что при практическом применении метода Nadolschi нижней границей является $Z=86°$, ибо при $Z<86°$ ряд (1) практически расходится, и однозначное решение системы (2) не достигается. Однако разложение (1), справедливое для $Z\leqslant 86°$, содержит коэффициенты C_{2l-1}, которые при $2l-1\geqslant 5$ гораздо меньше $1''\cdot 10^{-6}$. Учитывая точность измерения вертикального и горизонтального диаметров фотоизображения Солнца [1], вряд ли можно ставить вопрос о реальном определении значений этих коэффициентов. Поэтому система уравнений (2) должна содержать два, максимум три члена разложения (1), а именно: C_1, C_3, и, по-видимому, C_5.

Устойчивость решения системы (2), как и всякой системы линейных уравнений, зависит от величины определителя, в свою очередь находящегося в зависимости от коэффициентов уравнений системы (2), т. е. от

$$\left[\operatorname{tg}^{2l-1}\left(Z_k+\frac{D}{2}\right)-\operatorname{tg}^{2l-1}\left(Z_k-\frac{D}{2}\right)\right],$$

а следовательно, от зенитных расстояний, на которых выполнено фотографирование Солнца.

Для проверки устойчивости решения системы (2) был выполнен численный эксперимент, заключающийся в нахождении определителя фиктивной системы уравнений, составленных для случая фотографирования Солнца на зенитных расстояниях 75—85°. Матрицы коэффициентов нормальных уравнений соответствуют системе (2):

$$A_1=\begin{vmatrix} 3 & -9\cdot 10^{12} \\ -9\cdot 10^{12} & 3\cdot 10^{5} \end{vmatrix} n=2; \qquad (3)$$

$$A_2=\begin{vmatrix} 3 & -9\cdot 10^{12} & 2\cdot 10^{5} \\ -9\cdot 10^{12} & 3\cdot 10^{5} & 61\cdot 10^{6} \\ 2\cdot 0^{5} & 61\cdot 10^{6} & 12\cdot 10^{9} \end{vmatrix} n=3. \qquad (4)$$

Определители матриц (3) и (4) соответственно равны $\det A_1 = 1 \cdot 10^5$ и $\det A_2 = 1 \cdot 10^{16}$, что, согласно работе [5], свидетельствует об устойчивости решения системы нормальных уравнений (3) и (4).

Таблица 1

Результаты измерений фотоизображений Солнца

Дата	Серия	z	$Д_{гор}$, мм	$M_{гор}$, мкм	$Д_{вер}$, мм	$M_{вер}$, мкм	$Д_{гор} - Д_{вер}$, мм
22.08.77	I	82 30	15,1390	5,6	14,8845	5,2	0,2545
		85 00	15,1473	5,0	14,7049	4,3	0,4424
		86 00	15,2083	4,9	14,5620	5,7	0,6463
26.08.77	II	83 00	15,2080	6,4	14,9250	8,1	0,2833
		85 00	15,2036	3,8	14,7398	3,4	0,4685
		86 30	15,1936	3,6	14,6038	4,2	0,6045
29.08.77	III	79 15	15,2469	8,5	15,1275	4,4	0,1194
		80 00	15,3645	5,7	15,2220	5,6	0,1425
		83 10	15,2261	2,8	14,9850	2,9	0,2411
		83 50	15,1766	0,9	14,8719	2,4	0,3047
		85 00	15,1116	2,3	14,7654	3,7	0,3462
30.08.77	IV	72 30	15,2201	3,8	15,1539	1,6	0,0662
		74 30	15,1815	6,5	15,1054	5,6	0,0761
		77 30	15,2373	5,4	15,1322	2,2	0,1051
		81 50	15,2108	4,5	15,0263	1,9	0,1845
		84 40	15,2772	2,1	15,9029	5,3	0,3743

Летом 1977 г. нами было выполнено пробное фотографирование Солнца на экспериментальной фотоустановке с фокусным расстоянием 1500 мм. Фотоустановка смонтирована на базе астрономического универсала АУ 2/10, фотографическая труба имеет азимутальные и зенитальные движения такие же, как и зрительная труба АУ 2/10. Относительное отверстие объектива — 1/10. Диафрагма объектива — ирисовая, обеспечивающая изменение относительного отверстия в диапазоне 1/10—1/100. Затвор фотокамеры — центральный, позволяющий производить экспозиции от 1/25 до 1/250 с. Фотографировали Солнце на фотопластинки FU-5 «Orwo».

В результате фотографирования были получены фотоизображения Солнца в диапазоне зенитных расстояний 72—88°, что позволило выбрать серии по три—пять снимков, выполненных в один и тот же день на зенитных расстояниях 72—86°.

Измерения горизонтального и вертикального диаметров Солнца проводили на универсальном измерительном приборе УИМ-21. Линейные размеры диаметров определяли со средней точностью ±5 мкм, что при данном фокусном расстоянии соответствует 0″,7. В табл. 1 приведены результаты измерений снимков, подвергнутых дальнейшей обработке.

По данным табл. 1 составлены системы уравнений (2) с удержанием первых двух и затем трех членов разложения (1).

Системы уравнений вида (1) в качестве коэффициентов при неизвестных C_{2l-1} содержат разности $\operatorname{tg} Z$ верхнего и нижнего краев диаметра Солнца. В зоне $75° < Z < 86°$ значения $\operatorname{tg} Z$ быстро возрастают, поэтому коэффициенты при неизвестных C_{2l-1} резко отличаются друг от друга (на несколько порядков).

Таблица 2

Результаты решения систем линейных уравнений по методу наименьших квадратов

Дата	Серия	C_1''	C_3''	C_5''
22.08.77	I	57,88±1,1 61,92	0,026±0,01 0,048	— $4{,}6\times10^4$
26.08.77	II	65,16±08 66,12	0,043±0,01 0,047	— $6{,}5\times10^5$
29.08.77	III	63,16±1,0 59,90±1,1	0,069±0,01 0,042±0,01	— $8{,}5\times10^5$
30.08.77	IV	63,66±1,2 86,66±1,8	0,059±0,01 0,341±0,04	— $1{,}2\times10^3$

Примечание. Оценка точности отсутствует, так как система уравнений не содержит избыточных уравнений.

Известно [5], что подобные системы уравнений имеют неустойчивое решение. Чтобы избежать плохой обусловленности, при решении систем нормальных уравнений применяли, согласно работе [4], масштабирование коэффициентов при неизвестных.

Результаты решения систем нормальных уравнений по методу наименьших квадратов приведены в табл. 2.

Необходимо отметить, что приведенные в табл. 2 коэффициенты разложения (1) являются коэффициентами рефракции для фотографических лучей.

Отношение фотографической постоянной рефракции к визуальной равно 1,0155, поэтому коэффициенты рефракции для лучей, воспринимаемых глазом, принимают значения, приведенные в табл. 3.

Анализ данных табл. 2 позволяет сделать такие выводы:

1. Исходя из погрешностей определения коэффициентов разложения (1), можно утверждать, что метод Nadolschi практически применим для исследования постоянной рефракции.

2. Результаты решения системы уравнений (2) для диапазона $70° < Z < 86°$ показывают, что по сравнению с аналогичным решением при удержании двух членов разложения (1) удержание трех членов разложения (1) приводит к существенному перераспределению значений всех коэффициентов. Это свиде-

тельствует о необходимости раздельного решения систем (2), составленных по наблюдениям в указанном диапазоне, т. е. уравнения (2), составленные по наблюдениям Солнца при $Z<80°$, необходимо решать с удержанием только двух членов разложения (1). При $Z>80°$ указанные системы следует решать с удержанием трех членов разложения (1).

Следует отметить, что окончательное решение вопроса о включении третьего, а возможно, и следующих членов разложения (1) требует дополнительных глубоких исследований.

Таблица 3

Значения постоянной рефракции для лучей, воспринимаемых глазом

Серия	$n=2$	$n=3$
I	57″00	60″97
II	64″16	65″11
III	62″20	58″99
IV	62″69	85″34

Верхнюю границу зенитных расстояний, используемых в методе Nadolschi, определяют исходя из значения величины рефракционного искажения солнечного диска и ошибок его получения по фотографиям. Следовательно, она зависит от фокусного расстояния прибора, на котором производится фотографирование Солнца.

Сравнение предложенного метода определения постоянной рефракции с известным классическим свидетельствует о том, что метод Nadolschi, при котором учитывается относительная простота наблюдений и обработки, а также возможность нахождения постоянной рефракции практически в любых условиях, является более эффективным при исследовании астрономической рефракции.

Список литературы: 1. *Архангельский А. В.* О точности фотографического метода исследований астрономической рефракции. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1977, вып. 26. 2. *Блажко С. Н.* Об астрономической рефракции. — Астрономический журнал, 1944, т. 21, № 6. 3. *Загребин Д. В.* Введение в астрометрию. М., Наука, 1966. 4. *Ларченко Е. Г.* Вычислительная техника и экономико-математические методы в землеустройстве. М., Недра, 1973. 5. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1960. 6. *Nadolschi V.* Determinarea coeficientilor refractici din observatii Solare fotografice. — Ann. Stiint. Univer., Jaci, 1959. 7. *Scmidt.* Theorie der astronomischen Strahlenbrechung. Göttingen, 1828. 8. *Radau.* Essai sur les refractions astronomiques. Ann. de l'obs. de Paris. т. 16, 1882.

Работа поступила в редколлегию 18 января 1978 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.