

Г. А. МЕЩЕРЯКОВ

О НАХОЖДЕНИИ ПОЛЮСОВ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Использование максвеллова представления сферических функций [8] в математике, например [1—3], физике [8], геофизике [5], а в последнее время и в геодезии [4, 6, 7] предполагает знание полюсов этих функций. Известны два метода нахождения полюсов: способ Сильвестра [9], (см. также [1, 3]) и способ Умова [5]. Последний опробован в практических приложениях [5, 4], но, несмотря на простоту своей теоретической основы, он трудоемок в выкладках и его применение при $n \geq 3$, очевидно, будет нерациональным даже при обращении к ЭЦВМ. Способ Сильвестра также требует обширных вычислений, но зато он приводит к единообразной основной процедуре (именно, к решению алгебраических уравнений, хотя и высоких степеней), за счет чего допускает эффективную реализацию на ЭЦВМ. Целью настоящей заметки является детализация методики определения полюсов и моментов сферических функций, основанной на теореме Сильвестра [3, 9].

Рассмотрим общую сферическую функцию n -го порядка (n — целое, $n > 0$)

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = C_{n0} P_n(t) + \sum_{m=1}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(t), \quad (1)$$

где $t = \cos \vartheta$, ϑ — полярное расстояние $0 \leq \vartheta \leq \pi$; λ — долгота $-\pi \leq \lambda \leq \pi$, а также соответствующую шаровую функцию

$$Z_n(x, y, z) = \sum_{p+q+r=n} C_{pqr} x^p y^q z^r \text{ или } Z_n(r, \vartheta, \lambda) = r^n Y_n(\vartheta, \lambda); \quad (2)$$

(все коэффициенты в (1) и (2) предполагаются действительными числами).

По Максвеллу сферическая функция (1) записывается в виде

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!} M_n \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_n} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (3a)$$

где r — расстояние до произвольной точки пространства $Oxyz$ от центра O сферы единичного радиуса; $M_n > 0$ — момент функции и h_i — ее оси ($i=1, 2, \dots, n$). Заметим, что после дифференцирований по осям h_i , предусмотренных формулой (3a), из производной выделяется множитель $\frac{1}{r^{n+1}}$ и правая часть формулы (3a) превращается в функцию только ϑ и λ , как раз и являющуюся сферической функцией.

С учетом выражения оператора дифференцирования по направлению $\vec{h}_i$

$$\frac{\partial}{\partial h_i} = a_i \frac{\partial}{\partial x} + b_i \frac{\partial}{\partial y} + c_i \frac{\partial}{\partial z}, \quad (4)$$

где a_i, b_i, c_i — направляющие косинусы направления дифференцирования, формула (3a) записывается еще и в равносильной форме

$$Y_n(\vartheta, \lambda) = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!} M_n \prod_{i=1}^n \left(a_i \frac{\partial}{\partial x} + b_i \frac{\partial}{\partial y} + c_i \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{r}. \quad (3b)$$

Обозначая

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \eta = \frac{\partial}{\partial y}; \quad \zeta = \frac{\partial}{\partial z},$$

скажем, что оператору дифференцирования (4) соответствует в символической записи линейная форма

$$L_i(\xi, \eta, \zeta) = a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta, \quad (5)$$

рассматриваемая в пространстве $O\xi\eta\zeta$.

Задача приведения сферической функции (1) к максвеллову виду (3) требует знания ее момента и осей, определение которых по Сильвестру [9] следует из решения системы уравнений

$$Z_n(\xi, \eta, \zeta) = 0 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} Z_n(\xi, \eta, \zeta) = 0 \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0 \end{matrix}} \right\} \quad (6a)$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} Z_n(\xi, \eta, \zeta) = 0 \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0 \end{matrix}} \right\} \quad (6b)$$

Рассмотрение поверхностей (6) при этом должно доставить общие образующие конуса (6а) и мнимого конуса (6б), а иско-
мые оси h_i функции (1) являются тогда направляющими век-
торами плоскостей, каждая из которых содержит по две общих
образующих конусов (6).

Следуя [3], установим на поверхностях (6) общую парамет-
ризацию u и v

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} v, \end{array} \right. \quad (7a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{2u}{1 + u^2} v, \end{array} \right. \quad (7б)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta = iv, (i = \sqrt{-1}), \end{array} \right. \quad (7в)$$

при которой (6б) тривиально-удовлетворяется, а (6а), вслед-
ствие того, что Z_n однородная функция n -ой степени, приобре-
тает следующий вид:

$$Z_n(\xi, \eta, \zeta) = v^n R_{2n}(u) = 0,$$

где R_{2n} — рациональная функция, легко преобразуемая в алгеб-
раическую степени $2n$ с комплексными коэффициентами.

Решая алгебраическое уравнение степени $2n$

$$R_{2n}(u) = 0, \quad (8)$$

найдем $2n$ его комплексных корней $u_k (k=1, 2, \dots, 2n)$. Каждый
из этих корней доставляет на основании (7) общую образу-
ющую конических поверхностей (6)

$$\xi = \frac{1 - u_k^2}{1 + u_k^2} v; \quad \eta = \frac{2u_k}{1 + u_k^2} v; \quad \zeta = iv,$$

канонические уравнения которой

$$\frac{\xi}{\alpha_1 + i\beta_1} = \frac{\eta}{\alpha_2 + i\beta_2} = \frac{\zeta}{i}. \quad (9)$$

Следовательно, все эти образующие — мнимые. Любая пара
таких мнимых образующих определяет плоскость, проходящую
через начало системы координат $0\xi\eta\zeta$, поэтому ей соответствует
линейная форма вида (5). Таких плоскостей всего $C_{2n}^2 =$
 $\frac{2n(2n-1)}{2!} = n(2n-1)$, причем уравнение каждой из них

имеет вид

$$A_j \xi + B_j \eta + C_j \zeta = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \alpha'_1 + i\beta'_1 & \alpha'_2 + i\beta'_2 & i \\ \alpha''_1 + i\beta''_1 & \alpha''_2 + i\beta''_2 & i \end{vmatrix} = 0. \quad (10)$$

Одним штрихом здесь обозначены величины, относящиеся к первой образующей, которая вместе со второй определяет каждую плоскость (10), причем в (10) $j=1, 2, \dots, n(2n-1)$.

Итак, из $n(2n-1)$ в общем случае мнимых плоскостей (10) надо выбрать действительные, которых там фактически ровно n [9, 3]. Легко проверить непосредственными вычислениями, что плоскость (10) будет действительной только при определенных соотношениях между действительными α и мнимыми β частями чисел $\alpha+i\beta$, определяющих пару образующих, через которые проходит эта плоскость. Эти соотношения имеют вид:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } 1 \ \alpha'_1 = \alpha'_1; \ 2 \ \alpha'_2 = \alpha'_2; \ 3 \ \alpha'_1 (\beta'_2 - \beta'_2) = \alpha'_2 (\beta'_1 - \beta'_1); \\ \text{либо б) } 1 \ \beta'_1 = \beta'_1; \ 2 \ \beta'_2 = \beta'_2; \ 3 \ \alpha'_1 \alpha'_2 = \alpha'_1 \alpha'_2, \end{array} \right\} \quad (11)$$

то есть у комплексных величин $\alpha+i\beta$, пропорциональных направляющим косинусам мнимых образующих поверхностей (6) и попарно определяющих действительную плоскость (10), должны быть, во-первых, равны или действительные или мнимые части и, во-вторых, они должны удовлетворять условию 3 из соответствующей строки формул (11). Заметим, что только в случае б) пара образующих, определяющих действительную плоскость (10), является комплексно-сопряженной; это будет, кстати, после того, как знаменатели уравнений (9) одной из мнимых образующих в паре будут умножены на -1 , что не изменит ее направления. Утверждать, что при любом n имеет место только этот случай, как это сделано в [1, 3], у нас пока нет оснований.

Выбрав путем перебора n пар образующих (9), удовлетворяющих условиям (11), получим n действительных плоскостей (10), направляющие косинусы которых

$$a_i = \frac{A_i}{\mu_i}; \ b_i = \frac{B_i}{\mu_i}; \ c_i = \frac{C_i}{\mu_i}, \ (\mu_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2 + C_i^2}) \quad (12)$$

дают n искоемых осей $\vec{h}_i$ сферической функции (1).

Полюсом сферической (или шаровой) функции называется точка сферы единичного радиуса, в которой ее поверхность пересекается осью функции. Найдя направляющие косинусы (12) осей сферической функции (1), вычисляем положение полюсов

$$\cos \vartheta_i = c_i; \ \operatorname{tg} \lambda_i = \frac{b_i}{a_i}; \ (i = 1, 2, \dots, n). \quad (13)$$

Но так как направления осей сферической функции можно менять в парах без изменения при этом значения функции [8], следует уточнить, какую именно из двух диаметрально противоположных точек пересечения сферы осью функции надо принять за ее полюс. Проще всего для этого воспользоваться зна-

чениями функции (1) во всех $2i$ точках (13), из которых i точек — суть полюсы функции, а i — их антиподы. При этом придется прибегнуть к использованию момента M_n функции (1), который легко находится хотя бы из сравнения значений сферической функции в какой-либо точке сферы (например, в ее северном полюсе), получаемых, во-первых, из выражения (1), и, во-вторых, из общей формулы Максвелла (не приведенной здесь), являющейся следствием (3а) и содержащей косинусы углов между осями функции и косинусы углов между текущим направлением и осями функции.

В заключение отметим, что теоретически более простое решение задачи может быть получено при параметризации поверхностей (6) с помощью функций

$$\xi = v \cos w; \eta = v \sin w; \zeta = iv.$$

Уравнения искомых плоскостей при этом имеют вид

$$A_j \xi + B_j \eta + C_j \zeta = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \cos w' & \sin w' & i \\ \cos w'' & \sin w'' & i \end{vmatrix} = 0.$$

Выбор из них действительных плоскостей требует установления условий, при которых выражения

$$P = \sin w'' - \sin w'; Q = \cos w'' - \cos w'; R = \operatorname{sh} i(w'' - w'),$$

были бы одновременно все действительными или все чисто мнимыми. С точки зрения практики проверка корней уравнения $R_{2n}(\cos w) = 0$ с комплексными коэффициентами на такие условия намного сложнее, нежели использования условий (11) в случае принятия параметризации (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гобсон Е. В. Теория сферических эллипсоидальных функций. М., «Иностранная литература», 1952.
2. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М., «Высшая школа», 1970.
3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.—Л., ГИТТЛ, 1951.
4. Мещеряков Г. А. О мультипольном представлении гравитационного потенциала. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1974, вып. 19.
5. Умов Н. А. Построение геометрического образа потенциала Гаусса как прием изыскания законов земного магнетизма. — Избранные сочинения. М.—Л., ГИТТЛ, 1950.
6. Groten E. On the spherical harmonics, series of the geopotential at the Earth's surface, Bull. géodésique, № 88, 1968.
7. Hotin M. Mathematical Geodesy. Washington, 1969.

8. Maxwell G. T. A treatise on Electricity and Magnetism, vol. 1, 2nd edition. Oxford, 1881.

9. Silverster J. J. Note of spherical harmonics 1876. Collected Mathematical Papers, vol. 3. Cambridge, 1909.

Работа поступила в редколлегию 23 января 1975 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.
