УДК 528.2

И. Ф. МОНИН

О ПРАКТИЧЕСКОМ ПРИМЕНЕНИИ НЕКОТОРЫХ СООТНОШЕНИЙ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ РЕГУЛЯРИЗИРОВАННОЙ ЗЕМЛИ

В работе [1] получены соотношения между элементами гравитационного поля регуляризированной Земли. В качестве поверхности относимости принималась неуровенная сфера. Известно, что сферическая поверхность относимости является довольно грубым приближением фигуры регуляризированной Земли. Более точной поверхностью относимости в теории фигуры Земли считается эллипсоид вращения. В связи с этим соотношения между элементами гравитационного поля, полученные в статье [1], в практическом приложении могут оказаться грубыми. Покажем, что это не совсем так. При практическом применении формул статьи [1], очевидно, необходимо использовать нормальное поле (чтобы не иметь дела с большими величинами). В зависимости от того, как используется нормальное поле, формулы могут иметь практическое значение или нет.

Рассмотрим формулу Стокса

$$\zeta = \frac{a}{4\pi\gamma}\int \Delta g\,[S(\psi)-1]\,d\sigma + \frac{W_0-U_0}{\gamma}, \qquad (1)$$

где Δg — смешанные аномалии силы тяжести, представляющие собой разность между силой тяжести геоида и уровенного эллипсоида вращения; $S(\psi)$ — функция Стокса; a — большая полуось уровенного эллипсоида; γ — сила тяжести уровенного эллипсоида; W_0, U_0 — потенциал силы тяжести геоида и уровенного эллипсоида; $d\sigma$ — элемент поверхности единичной сферы; ζ — высота геоида над эллипсоидом.

Проверим формулу (1) на модели *2* (см. [2], с. 104). Напомним, что в модели *2* в качестве геоида принят эллипсоид Красовского. За отсчетную поверхность взят эллипсоид вращения, у которого большая полуось такая же, а малая на 100 *м* больше, чем в эллипсоиде Красовского. В табл. 1 приведены результаты вычислений: $\zeta_{\text{геом}}$ — высота геоида, полученная из геометрических соображений; $\zeta_{\text{грав}}$ — высота геоида, вычисленная по формуле (1).

Вычислим теперь по формуле (1) высоты геоида для следующей модели. Возьмем в качестве геоида эллипсоид Красовского. За отсчетную поверхность примем уровенную сферу радиуса a, равного большой полуоси эллипсоида Красовского.

Таблица 1

Высота геоида над эллипсоидом

ζ	Ф—широта									
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
ζ геом	0	3,045	11,804	25,191	41,563	58,926	75,188	88,405	96,988	99,999
ζ грав	0	3,011	11,680	24,962	41,252	58,593	74,886	88,168	96,837	99,848
Разность	0	0,034	0,124	0,229	0,308	0,333	0,635	0,240	0,151	0,151

Из решения проблемы Стокса для сферы [3] имеем

$$\gamma = \frac{fM}{a^2} - \frac{3}{2}\omega^2 a + \frac{5}{2}\omega^2 a \sin^2 \Phi; \ \gamma_e = \frac{fM}{a^2} - \frac{3}{2}\omega^2 a;$$

$$\gamma \approx \gamma_e \left(1 + \frac{5}{2} q \sin^2 \Phi\right); \ q = \frac{\omega^2 a}{\gamma_e},$$

где M — масса уровенной сферы; γ_e — экваториальная постоянная силы тяжести.

Подберем массу уровенной сферы так, чтобы экваториальная постоянная силы тяжести для сферы равнялась экваториальной постоянной силы тяжести уровенного эллипсоида Красовского. Тогда аномалии силы тяжести для данной модели определяются

$$\Delta g = \gamma_e \left(\beta - \frac{5}{2} q\right) \sin^2 \Phi,$$

где β — постоянная нормальной формулы для эллипсоида Красовского.

Подставляя Δg в формулу (1), получим

$$\zeta_{\text{грав}} = a\left(\beta - \frac{5}{2} q\right) \sin^2 \Phi = 21558{,}468 \sin^2 \Phi. \qquad (2)$$

Геометрические высоты геоида найдем по формуле

$$\zeta_{\text{геом.}} = a\alpha \sin^2 \Phi = 21367{,}121 \sin^2 \Phi. \qquad (3)$$

Результаты вычислений по формулам (2) и (3) приведены в табл. 2.

Из табл. 1 и 2 следует, что формула (1) позволяет определять фигуру регуляризированнсго геоида как по отношению к сфере, так и по отношению к эллипсоиду вращения с относительной погрешностью порядка сжатия эллипсоида.

Теперь преобразуем полученные в статье [1] формулы к виду, удобному для практических приложений.

Таблица 2

Высота геоида над сферой

	Ф—широта									
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
ζ грав	0	650,1	2521,9	5389,6	8907,4	12651,0	16168,9	19036,6	20908,4	21558,5
ζ геом	0	644,3	2499,5	5341,8	8828,4	12538,7	16025.3	18867,6	20722,8	21367,1
Разность	0	5,8	22,4	47,8	79,0	112,3	143,6	169,0	185,6	191,4

1. Формула, обратная формуле Стокса,

$$g = \frac{g_e}{a}\zeta_0 + \frac{g_e}{2\pi}\int \frac{\zeta - \zeta_0}{r^3} dS + \frac{W_0}{a} + \frac{2}{3}\omega^2 a - \frac{5}{2}\omega^2 a \cos^2\Phi. \quad (4)$$

Для уровенной сферы имеем [3]

$$U_0 = \frac{fM}{a^2} + \frac{\omega^2 a}{3}; \quad (5)$$

$$\gamma = \frac{fM}{a^2} + \omega^2 a - \frac{5}{2}\omega^2 a \cos^2\Phi, \quad (6)$$

следовательно,

$$\gamma = \frac{U_0}{a} + \frac{2}{3}\omega^2 a - \frac{5}{2}\omega^2 a \cos^2\Phi. \quad (7)$$

Из формул (4) и (7) получаем

$$\Delta g = g - \gamma = \frac{\zeta_0}{a}\gamma_e + \frac{\gamma_e}{2\pi}\int \frac{\zeta - \zeta_0}{r^3} dS + \frac{W_0 - U_0}{a}. \quad (8)$$

Как известно, зависимость между сферическими функциями для высот геоида ζ и аномалий силы тяжести Δg в случае, когда отсчетная поверхность есть уровенный эллипсоид вращения, имеет вид [4]

$$\gamma_e \zeta_0 = -a\Delta g_0 + W_0 - U_0, \ \gamma_e \zeta_n = \frac{a}{n-1}\Delta g_n.$$

Отсюда

$$\Delta g = \frac{\gamma_e}{a}\sum_0^\infty (n-1)\zeta_n + \frac{W_0 - U_0}{a}. \quad (9)$$

Применяя теорему восстановления сферических функций

$$\zeta_n = \frac{2n+1}{4\pi^2 a}\int \zeta P_n(\cos\psi)\,dS,$$

из формулы (9) получаем

$$\Delta g = \frac{\gamma_e}{4\pi a^3}\int (\zeta - \zeta_0)\,F(\psi)\,dS - \frac{\zeta_0}{a}\gamma_e + \frac{W_0 - U_0}{a},$$

где

$$F(\psi) = \sum_0^\infty (2n+1)(n-1)\,P_n(\cos\psi) = \sum_0^\infty (2n+1)(n+1)\,P_n(\cos\psi) -$$

$$-2\sum_0^\infty (2n+1)P_n(\cos\psi) = \sum_0^\infty (2n+1)(n+1)\,P_n(\cos\psi) = -\frac{2a^3}{r^3},$$

$$r = 2a\sin\frac{\psi}{2}.$$

Таким образом,

$$\Delta g = -\frac{\zeta_0}{a}\gamma_e - \frac{\gamma_e}{2\pi}\int \frac{\zeta - \zeta_0}{r^3}\,dS + \frac{W_0 - U_0}{a}. \qquad (10)$$

Как видим, формулы (8) и (10) по виду одинаковы, однако они получены для разных отсчетных поверхностей. Следовательно, формулу (8) можно применять для эллипсоидальной отсчетной поверхности, если γ и U_0 брать для уровенного эллипсоида. Некоторое различие в знаках объясняется тем, что в формуле (10) высота геоида отсчитывается от эллипсоида. В формуле же (8), как и в других формулах статьи [1], высота геоида отсчитывается от геоида.

2. Формула, обратная формуле Венинг-Мейнеса

$$g = \frac{\gamma_e}{a}\zeta_0 + \frac{\gamma_e}{2\pi a}\int \frac{\partial\zeta}{\partial r}\left(\frac{a}{r^2} - \frac{1}{2r}\right)dS + \frac{W_0}{a} + \frac{2}{3}\omega^2 a - \frac{5}{2}\omega^2 a\cos^2\Phi,$$

точно так же, как и формула (8), при помощи формулы (7) приводится к следующей:

$$\Delta g = \frac{\zeta_0}{a}\gamma_e + \frac{\gamma_e}{2\pi a}\int \frac{\partial\zeta}{\partial r}\left(\frac{a}{r^2} - \frac{1}{2r}\right)dS + \frac{W_0 - U_0}{a}. \qquad (11)$$

3. Формула Калландро. Из соотношений сферических функций имеем

$$\gamma_e\zeta_0 = W_0 - U_0 - a\Delta g;$$

$$\frac{\gamma_e}{4\pi a^2}\int \zeta dS = W_0 - U_0 - \frac{1}{4\pi a}\int \Delta g\,dS.$$

Следовательно,

$$\zeta_0 = \frac{W_0 - U_0}{\gamma_e} - \frac{1}{4\pi a \gamma_e} \int \Delta g \, dS - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial \zeta}{\partial r} \left(\frac{2}{r} - \frac{r}{2a^2} \right) dS. \quad (12)$$

4. Формула для второй радиальной производной

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} = \frac{4g_0}{a} - \frac{6\zeta_0}{a^2}\gamma_e - \frac{2W_0}{a^2} + 10\,\omega^2 \cos^2 \Phi - \frac{8}{3}\omega^2 - \frac{1}{2\pi} \int \frac{g - g_0}{r^3} dS. \quad (13)$$

Потенциал силы тяжести уровенной сферы во внешнем пространстве определяется [3]:

$$W = \frac{a}{\rho} U_0 - \frac{\omega^2}{3} (\rho^2 - a^2) \frac{a^3}{\rho^3} - \frac{\omega^2 a^2}{2} \cdot \frac{a^3}{\rho^3} \cos^2 \Phi + \frac{\omega^2}{2} \rho^2 \cos^2 \Phi.$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} \right)_{\rho=a} = \frac{2U_0}{a^2} + \frac{10}{3}\omega^2 - 5\omega^2 \cos^2 \Phi.$$

Подставляя в формулу (13)

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} \right)_{\rho=a}$$

и учитывая (7), после несложных преобразований, получаем

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} = \frac{4\Delta g_0}{a} - \frac{6\gamma_e}{a^2}\zeta_0 + \frac{2}{a^2}(U_0 - W_0) - \frac{1}{2\pi} \int \frac{\Delta g - \Delta g_0}{r^3} dS. \quad (14)$$

Итак, формулы (8), (11), (12) и (14) можно применять в случае эллипсоидальной отсчетной поверхности. Отметим, что аналогичные формулы были впервые получены В. А. Магницким и М. С. Молоденским [5] с использованием нормального поля, соблюдая условие $W_0 = U_0$. Наши формулы более общие, они получены без соблюдения указанного условия. Некоторые различия в знаках отдельных слагаемых этих формул объясняются той же причиной, что и при выводе формулы (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин И. Ф. К теории гравитационного поля регуляризированной Земли. — «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1960, вып. 3.

2. Монин И. Ф. К определению фигуры Земли с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия земного эллипсоида. — «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1962, вып. 4.

3. Монин И. Ф. Решение проблемы Стокса в одной частной постановке. — «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1959, вып. 6.

4. Монин И. Ф. К определению фигуры регуляризированного геоида.— «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1960, вып. 5.
5. Молоденский М. С. и др. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. — «Тр. ЦНИИГАиК», 1960, вып. 131.

Работа поступила в редколлегию 9 января 1975 года. Рекомендована кафедрой инженерной геодезии Львовского политехнического института.