УДК 528:519.2

И. Ф. МОНИН

К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ФОРМУЛЫ ГАУССА ДЛЯ ПЛОТНОСТИ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Получим формулу Гаусса для плотности $p(\Delta)$ нормального закона распределения непрерывных случайных величин на основании статистических свойств случайных ошибок Δ, которые имеют место в геодезических измерениях.

Как известно, случайные ошибки измерений имеют следующие свойства:

1. При определенных условиях измерений случайные ошибки по абсолютной величине не превосходят некоторого предела.
2. Положительные ошибки встречаются так же часто, как и равные им по абсолютной величине отрицательные ошибки.
3. Среднее арифметическое из случайных ошибок результатов измерений одной и той же величины стремится к нулю при неограниченном росте числа измерений.
4. Малые по абсолютной величине ошибки встречаются чаще, чем большие.

С точки зрения теории вероятностей, случайные ошибки результатов измерений удовлетворяют следующим известным условиям:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx = 1; \quad (1) \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx = 0; \quad (2) \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1, \quad (3)$$

где $x = \frac{\Delta}{\sigma}$ — нормированное значение случайной ошибки Δ; σ — среднее квадратическое отклонение (или корень квадратный из дисперсии); $p(x)$ — плотность нормального закона распределения непрерывных случайных величин.

Условия (1) и (2) следуют из свойств случайных ошибок и определений дисперсии Dx и стандарта Mx случайных величин.

Плотность любого распределения случайной величины всегда удовлетворяет условию (3). Известно, что $p(x)$ для нормального распределения есть функция четная, то есть $p(x)=p(-x)$. Об этом свидетельствует второе свойство случайных ошибок результатов измерений. Легко показать, что производная $p'(x)=\frac{dp(x)}{dx}$ является нечетной функцией. Для этого применим к (2) формулу интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

где $u=p(x), dv=xdx, v=\frac{x^2}{2}$, $du = p'(x)\,dx$.

Тогда из (2) получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,dx = \frac{x^2}{2}p(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p'(x)\,dx = 0,$$

$$\frac{x^2}{2}p(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p'(x)\,dx = 0. \tag{4}$$

Условие (4) свидетельствует о том, что $p'(x)$ является нечетной функцией.

Для нечетной функции $p'(x)$ должно удовлетворяться следующее очевидное условие:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p'(x)\,dx = 0. \tag{5}$$

Умножим подинтегральное выражение в (5) на $xp(x)/xp(x)$. Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\frac{p'(x)}{xp(x)}\,dx = 0. \tag{6}$$

Теперь из анализа условий (2) и (6) нетрудно установить (см. таблицу), что

$$\frac{p'(x)}{xp(x)} = \text{const} = C_1, \tag{7}$$

а решая дифференциальное уравнение (7), найдем

$$p(x) = C_2\, e^{-C_1 \frac{x^2}{2}}, \tag{8}$$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования. Знак минус возле C_1 мы поставили потому, что функция $p(x)$, как известно, есть убывающая функция. С увеличением x значение $p(x)$ уменьшается, о чем свидетельствует четвертое свойство случайных ошибок.

Результаты экспериментального доказательства уравнения (7)

Интервал	Граница интервала, *сек*	Частоты в интервале n_i	Частость в интервале $p_i=\frac{n_i}{\Sigma n_i}$	Абсциссы границ интервала z_i	Нормированные значения $x_i=\frac{z_i-a}{\sigma}$	$x_i p_i$	$p_i' \approx \frac{p_{i+1}-p_i}{\Delta x_i}$	$\frac{p_i'}{x_i p_i}$
1	18 – 19	4	0,027	18″	—2,80	—0,07	0,07	—1,0
2	19—20	12	0,081	19	—2,01	—0,16	0,17	—1
3	20—21	32	0,215	20	—1,21	—0,26	0,16	—1
4	21—22	51	0,342	21	—0,42	—0,14	—0,18	—1
5	22—23	30	0,201	22	0,37	0,08	—0,10	—1
6	23—24	18	0,121	23	1,17	0,14	—0,14	—1
7	24—25	2	0,013	24	1,96			
		149	1,000					

Примечание: Данные эксперимента заимствованы из монографии Н. В. Смирнова и Д. А. Белугина «Теория вероятностей и математическая статистика в приложении к геодезии» (М., «Недра», 1969, с. 93, 94). В эксперименте измерялся горизонтальный угол теодолитом ТТ-2/6 способом круговых приемов 149 раз на пункте триангуляции. Среднее арифметическое значение угла $a=...21,53''$. Среднее квадратическое отклонение измерения угла получилось равным $\sigma=1,26''$. Как известно, распределение значений горизонтальных углов, измеренных на пунктах триангуляции, приближенно следует нормальному закону.

Величины C_1, C_2 найдем из условий (1) и (3). Подставим в (3) и (1) выражение (8)

$$C_2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-C_1 \frac{x^2}{2}} dx = 1, \qquad C_2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-C_1 \frac{x^2}{2}} dx = 1.$$

После замены переменной по формуле $x\sqrt{C_1}=t$, получим

$$\frac{C_2}{\sqrt{C_1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1; \quad (9) \qquad \frac{C_2}{C_1\sqrt{C_1}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1. \quad (10)$$

Выполняя в (10) интегрирование по частям

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -\frac{t}{e^{\frac{t^2}{2}}}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

и принимая во внимание известный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi},$$

получаем

$$C_1 = 1, \; C_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Следовательно,

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{11}$$

и мы получили формулу Гаусса для плотности нормального распределения непрерывных случайных величин.

Работа поступила в редколлегию 9 января 1975 года. Рекомендована кафедрой инженерной геодезии Львовского политехнического института.