УДК 528.33

М. Д. ГЕРАСИМЕНКО, канд. техн. наук
Дальневосточный госуниверситет

УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ НА ЭВМ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ КОРРЕЛАТНЫМ СПОСОБОМ

При построении геодезических сетей высокой точности следует применять наиболее строгие способы уравнивания с тем, чтобы точность сети не понизилась из-за способа обработки результатов измерений. Выбирая способ уравнивания, необходимо учитывать его преимущества и недостатки, возможность своевременной оценки качества сети в каждой ее части и отбраковки грубых результатов измерений до выполнения собственно уравнивания, объем вычислений и, что наиболее важно, получение наиболее надежного и устойчивого решения. Указанным качествам в полной мере отвечает коррелатный способ, особенно при уравнивании недостаточно жестких построений [5]. Если в сети наблюдались направления, то и уравнивать следует направления, так как замена направлений углами приводит к некоторой потере точности элементов сети [4, 7 и др.].

Имеющиеся для этой цели программы реализуют, как правило, параметрический способ, который наиболее удобен при программировании уравнительных вычислений на ЭВМ. Довольно широкое распространение, например для уравнивания комбинированных сетей [3], получил также коррелатный способ с дополнительными неизвестными.

До недавнего времени для уравнивания на ЭВМ этот способ в чистом виде практически не использовался из-за отсутствия универсального алгоритма составления условных уравнений в геодезических сетях сложной конфигурации. Решение данной задачи в общем виде было описано в работе [2].

Составляя условные уравнения поправок для углов по методике, изложенной в работе [2], и заменяя в них каждую поправку в угол разностью поправок соответствующих направлений, можно получить условные уравнения поправок измеренных направлений. Если условные уравнения составлены для углов между смежными направлениями, то в результате получим, кроме независимых, избыточные, зависимые уравнения. Их число равно числу условий горизонта при составлении условных уравнений поправок углов по классической методике.

Поэтому, чтобы исключить возможность составления зависимых условий, а также для удобства организации вычислений на ЭВМ, выгодно составлять условные уравнения для углов

$$t_i = l_i - l_0, \tag{1}$$

для которых число условных уравнений равно числу условий для измеренных направлений. Углы t_i вычисляются на каждом пункте сети между произвольно выбранным начальным направлением l_0 и всеми остальными измеренными направлениями l_i. Направление l_0 ориентирует все остальные направления. Число ориентирующих направлений в сети равно k (k — число пунктов, на которых производились угловые измерения).

Выберем из полученных таким образом углов и других измеренных величин (длин линий и т. п.) $2n$, необходимых для вычисления предварительных координат n определяемых пунктов, и составим из них с учетом уравнения (1) вектор

$$S = L_1 - A_1 L_0, \tag{2}$$

где L_1 и L_0 — векторы, составленные из необходимых для построения сети измерений (для удобства назовем их векторами необходимых измерений и ориентирующих направлений соответственно, причем здесь и в дальнейшем под термином вектор будем подразумевать матрицу столбцового типа); A_1 — матрица размера $2n \times k$, в каждой строке которой для необходимых углов имеется лишь один ненулевой элемент $a_{ij}=1$, если j равно номеру ориентирующего направления, использованного для вычисления необходимого угла s_i. Для остальных необходимых величин все элементы соответствующей строки равны нулю.

Аналогично из остальных

$$r = m - 2n - k \tag{3}$$

углов вида (1), измеренных длин линий и других элементов составим вектор избыточных измерений

$$C = L_2 - A_0 L_0, \tag{4}$$

где L_2 — вектор избыточных измерений; A_0 — матрица размера $r \times k$, получаемая аналогично матрице A_1; m — число измеренных элементов сети.

Система условных уравнений [2] имеет вид

$$G V_S - V_C + W = 0. \tag{5}$$

Здесь V_S и V_C — векторы поправок к векторам S и C соответственно; $W = \bar{C} - C$ — вектор невязок; $\bar{C}$ — вектор избыточных величин, вычисленный по вектору X предварительных координат определяемых пунктов.

Матрица G, согласно известным правилам дифференцирования вектор-функции [1],

$$G = \frac{\partial \bar{C}}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial S} = DF. \tag{6}$$

С учетом уравнений (2) и (4) систему условных уравнений (5) приводим к системе условных уравнений поправок непосредственных результатов измерений

$$R V_0 + G V_1 - V_2 + W = 0, \tag{7}$$

где $R=A_0-GA_1$; V_0, V_1 и V_2 — векторы поправок к векторам L_0, L_1 и L_2 соответственно.

Для составления условных уравнений (7) можно рекомендовать следующий алгоритм:

1. Нумерация исходных пунктов и нумерация определяемых пунктов по мере удаления от исходных.

2. Составление условных уравнений по углам (1) по методике, изложенной в работе [2]. При этом будут получены матрица G и вектор невязок W. В качестве ориентирующих выбирают направления на пункт с младшим номером.

3. Формирование матрицы R, любой элемент которой $r_{ij}=1-\sum\limits_{p\in j} g_{ip}$, если в i-м условном уравнении избыточно измеренная величина — направление с пункта j, или, в противном случае, $r_{ij}=-\sum\limits_{p\in j} g_{ip}$. Сумму $\sum\limits_{p\in j} g_{ip}$ элементов i-й строки матрицы G вычисляют для всех необходимых направлений, измеренных с j-го пункта.

Если результаты измерений независимы, то, решая уравнения (7) под условием

$$V_0^T P_0 V_0 + V_1^T P_1 V_1 + V_2^T P_2 V_2 = \min, \tag{8}$$

получаем поправки:

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= P_0^{-1} R^T K; \\ V_1 &= P_1^{-1} G^T K; \\ V_2 &= -P_2^{-1} K, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

где P_0, P_1 и P_2 — весовые матрицы ориентирующих, необходимых и избыточных измерений.

Вектор коррелат K находим из системы нормальных уравнений

$$NK + W = 0 \tag{10}$$

с матрицей коэффициентов

$$N = RP_0^{-1} R^T + GP_1^{-1} G^T + P_2^{-1}. \tag{11}$$

Учитывая, что вектор поправок в предварительные координаты определяемых пунктов [2]

$$V_X = \frac{\partial X}{\partial S} V_S = FV_S, \tag{12}$$

с учетом формулы (2) получаем

$$V_X = -FA_1 V_0 + FV_1. \tag{13}$$

Вектор V_X может быть использован для получения окончательных координат пунктов сети без их повторного вычисления по уравненным результатам измерений.

Для нахождения матрицы весовых коэффициентов Q_{XX} уравненных координат пунктов, необходимой для оценки точности элементов сети, запишем известное из способа наименьших квадратов выражение для матрицы весовых коэффициентов уравненных значений измеренных величин:

$$Q_{ll} = \left(\begin{array}{cc|c} Q_{00} & Q_{01} & Q_{02} \\ Q_{10} & Q_{11} & Q_{12} \\ \hline Q_{20} & Q_{21} & Q_{22} \end{array}\right) = P^{-1} - P^{-1} B^T N^{-1} B P^{-1},$$

в котором весовая матрица результатов измерений

$$P = \begin{pmatrix} P_0 & & \\ & P_1 & \\ & & P_2 \end{pmatrix} -$$

матрица коэффициентов условных уравнений $B = (R, G, -E)$. Тогда

$$Q_{ll} = \tag{14}$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} P_0^{-1} - P_0^{-1} R^T N^{-1} R P_0^{-1} & -P_0^{-1} R^T N^{-1} G P_1^{-1} & P_0^{-1} R^T N^{-1} P_2^{-1} \\ -P_1^{-1} G^T N^{-1} R P_0^{-1} & P_1^{-1} - P_1^{-1} G^T N^{-1} G P_1^{-1} & P_1^{-1} G^T N^{-1} P_2^{-1} \\ \hline P_2^{-1} N^{-1} R P_0^{-1} & P_2^{-1} N^{-1} G P_1^{-1} & P_2^{-1} - P_2^{-1} N^{-1} P_2^{-1} \end{array}\right).$$

Используя формулы для оценки точности совокупности функций (6), с учетом уравнения (13) нетрудно получить

$$Q_{XX} = F A_1 Q_{00} A_1^T F^T + F Q_{11} F^T - F Q_{10} A_1^T F^T - F A_1 Q_{01} F^T. \tag{15}$$

Из формулы (15) следует, что для оценки точности сети достаточно получить лишь матрицу весовых коэффициентов уравненных ориентирующих и необходимых измерений. Необходимость в составлении специальных весовых функций координат, имеющих довольно сложный вид, отпадает.

Полученные формулы решают задачу строгого уравнивания и оценки точности коррелатным способом геодезических сетей с измеренными направлениями и легко поддаются программированию для ЭВМ.

Список литературы: 1. *Бойко Е. Г., Соломенцев Е. Д.* Некоторые методические вопросы способа наименьших квадратов. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1976, вып. 5. 2. *Герасименко М. Д.* Единый алгоритм составления условных уравнений и его применение для уравнивания и оценки точности геодезических построений. — Тр. НИИГАиК. М., 1975, т. 34. 3. *Маркузе Ю. И.* Алгоритм уравнивания комбинированных геодезических сетей. М., Недра, 1972. 4. *Рязанов В. П.* Оценка точности элементов триангуляционного ряда, уравниваемого по углам, в случае измерения направлений. — В кн.: Сборник статей по геодезии. М., Геодезиздат, 1952, вып. 11. 5. *Хубларова С. Л.* Оценка обусловленности систем нормальных уравнений. — Тр. ЦНИИГАиК. М., 1960, вып. 135. 6. *Юршанский З. М.* Формулы для оценки точности совокупности функций в способе наименьших квадратов. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1966, вып. 6. 7. *Allman J. S., Bennet G. G.* Angles and directions. — Survey Review, 1966, 18, № 139.

Работа поступила в редколлегию 13 декабря 1977 года. Рекомендована секцией геодезии и маркшейдерского дела XXIV научн.-техн. конференции Дальневосточного политехнического института.