

Первый минимум N приходится на полуденные часы, второй на наблюдается ночью. Максимумы соответственно наблюдаются в утренние и вечерние часы. 2. Во всех районах абсолютные значения N уменьшаются с высотой. 3. Кривая изменения N с высотой сглаживается. 4. Амплитуда колебаний N уменьшается с возрастанием широты района. 5. В холодный период в северном районе кривые изменений N на различных высотах имеют слабую амплитуду колебаний, а на высотах 300 м и выше индекс показателя преломления практически остается постоянным.

Список литературы: 1. Воронцов П. А. Некоторые особенности строения пограничного слоя атмосферы над поселком Махталы в сентябре 1959 года. — Тр. ГГО, 1961, вып. 107. 2. Воронцов П. А. Строение нижнего слоя атмосферы (0–0,5 км) в период Днепровской экспедиции. — Тр. ГГО, 1963, вып. 144/40. 3. Селицкая В. И. Суточный и годовой ход метеорологических элементов в нижнем слое воздуха 0,5 км над поселком Воейково. — Тр. ГГО, 1962, вып. 133.

Статья поступила в редколлегию 15. 12. 88

УДК 528 21/22

А. Н. МАРЧЕНКО

О ПОСТРОЕНИИ МОДЕЛЕЙ ТОЧЕЧНЫХ МАСС ГЕОПОТЕНЦИАЛА ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Ниже описана методика создания многоточечной модели планеты, аппроксимирующей ее возмущающий потенциал T равномерно сходящимся (при $N \rightarrow \infty$) к T [1, 3] рядом

$$T_N = \sum_{i=1}^N m_i \frac{1}{r_i} \approx T \quad (1)$$

фундаментальных решений $\frac{1}{r_i}$ уравнения Лапласа по информации, полагаемой исходной в рамках проблемы Молоденского. Запись (1) есть разложение T по системе неортогональных функций $\left\{\frac{1}{r_i}\right\}$ («обратных расстояний» или потенциалов точечных масс m_i), регулярных на бесконечности и гармонических вплоть до некоторой поверхности Ляпунова σ_h [1, 3], расположенной внутри планеты. Остановимся вначале на том варианте граничной задачи Молоденского, в котором предполагается, что аномалии силы тяжести Δg безошибочны и заданы непрерывно на всей поверхности Земли.

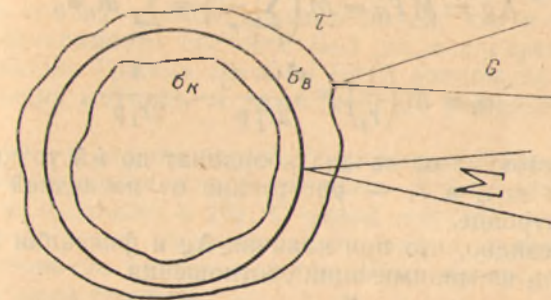
Воспользуемся краевым условием, отнесенным к некоторой вспомогательной поверхности τ (которую еще называют гипсометрической или теллуroidом), в линеаризованном виде

$$-\frac{\partial T}{\partial \rho} \Big|_{\tau} - \frac{2T}{\rho} \Big|_{\tau} = \Delta g, \quad (2)$$

где ρ — радиус-вектор текущей точки на теллуroidе. Более кратко (2) можно представить в операторной форме

$$MT = \Delta g. \quad (3)$$

Область определения оператора Молоденского M — множество функций, гармонических во внешнем относительно теллуroidа пространстве G и регулярных на бесконечности. Кроме того, оператор M является непрерывным на гильбертовом пространстве $L_2(\Sigma)$ (при $q \geq 1$), которое представляет собой пересечение гармонических (вне сферы Бьерхаммара) в Σ функций и регулярных



на бесконечности с соболевским пространством $W^2_2(\Sigma)$ [5]. Причем элементы $\Gamma^q_2(\Sigma)$ при $q \geq 2$ имеют обязательно непрерывные краевые функции. В соответствии с теоремой Рунге—Краупа [8] мы можем [3] и будем далее искать решение задачи с использованием (1) на одном из множеств $\Gamma^q_2(\Sigma)$. Поэтому важно, чтобы $\frac{1}{r_i} \in \Gamma^q_2(\Sigma)$. А так как каждая из функций $\frac{1}{r_i}$ непрерывна во всем пространстве, за исключением точки $i \in \sigma_h$, то чтобы и при $q \geq 2$ элементы $\frac{1}{r_i} \in \Gamma^q_2(\Sigma)$, достаточно поверхность σ_h («несущую» систему $\left\{\frac{1}{r_i}\right\}$) считать находящейся внутри сферы Бьерхаммара σ_h (см. рисунок).

Ниже мы останавливаемся лишь на определении величин m_i , полагая, что поверхность σ_h зафиксирована (фиксированы координаты точечных масс). Последнее, как будет показано далее, связано с тем, что даже при определении только m_i задачу построения многоточечной модели следует рассматривать как некорректную. Конечно, более желательно получить сразу решение общей проблемы определения всех параметров точечных масс, что, правда, приводит к нелинейной задаче. Учитывая, однако, что некорректные задачи в нелинейной постановке обычно решаются итеративным путем с предварительной линеаризацией [7], естественно рассматривать итоги данной работы как один из этапов создания общего алгоритма нахождения величин и координат точечных масс методом регуляризации.

На основании работ [1, 3] в [4] показано, что из сходимости на τ в среднем квадратичном ряда (1) и функции T следует сходимость того же типа на τ и в G последовательности $\frac{\partial T_N}{\partial \rho}$ к $\frac{\partial T}{\partial \rho}$.

а также равномерная сходимость последней в любой частичной подобласти внешности G . Сказанное выше позволяет получить с учетом (1)–(3) решение поставленной задачи в виде разложения по системе $\left\{\frac{1}{r_i}\right\}$

$$\Delta g \approx MT_N = M \left(\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{r_i} \right) = \sum_{i=1}^N m_i \omega_i, \quad (4)$$

причем

$$\omega_i = M \left(\frac{1}{r_i} \right) = \frac{\rho^2 - d_i^2}{2r_i^2 \rho} - \frac{3}{2r_i \rho}, \quad (5)$$

где d_i — расстояние от начала координат до i -й точки σ_k (до точечной массы m_i), а r_i — расстояние от последней до текущей точки на теллуриде.

Из (4) очевидно, что при наличии Δg и фиксации N возможно определение m_i из минимизации соотношения

$$\left\| \Delta g - \sum_{i=1}^N m_i \omega_i \right\|_{L_2(\tau)}^2 = \min, \quad (6)$$

в котором $\|\cdot\|_{L_2(\tau)}$ — норма в метрике гильбертова пространства $L_2(\tau)$. А так как оператор M линейный и ограниченный, то справедлива оценка

$$\|\Delta g - MT_N\|_{L_2(\tau)} = \|MT - MT_N\|_{L_2(\tau)} \leq \|M\| \cdot \|T - T_N\|_{L_2(\tau)}, \quad (7)$$

где $\|M\|$ — норма оператора Молоденского. В нашем случае $\|M\| = \text{const}$ — ограниченная постоянная, и поэтому на основании (7), а также гарантии [1, 3] сходимости в среднем квадратичном ряда (1) к T , получаем, что при аппроксимации (6) гарантирована сходимость в среднем квадратичном ряда (4) к функции Δg .

Следует отметить, что обсуждаемое здесь решение задачи Молоденского фактически сводится к задаче квадратичного приближения функции. Такой подход известен в физической геодезии для случая ортогональных сферических функций как с использованием приближений Молоденского [6], так и в рамках метода регуляризации Тихонова [5]. В нашей ситуации приходится иметь дело с базисной системой неортогональных функций $\frac{1}{r_i}$ и, естественно, учитывать их особенности.

Так, после дифференцирования (6) по величинам m_i решение находим из следующего матричного уравнения:

$$AX = L, \quad (8)$$

в котором X — вектор $(N \times 1)$ определяемых коэффициентов m_i ; $X = [m_i]_{N,1}$; A — симметричная матрица $(N \times N)$ типа $A = [a_{ij}]_{N,N}$; L — вектор $(N \times 1)$ типа $L = [l_i]_{N,1}$, причем:

$$a_{ij} = \int_{\tau} \omega_i \omega_j d\tau, \quad l_i = \int_{\tau} \Delta g \omega_i d\tau. \quad (9)$$

Система (8) будет иметь единственное решение в том случае, когда ее определитель Грамма отличен от нуля. В работах [1,

4] отмечено, что система функций $\left\{\frac{1}{r_i}\right\}$ линейно независима на τ . Можно показать, что и функции $\{\omega_i\} = \left\{M\left(\frac{1}{r_i}\right)\right\}$ будут также

линейно независимы на τ . (Для этого достаточно, например, воспользоваться той же схемой доказательства, что и в [2, 3]). Из линейной независимости системы $\{\omega_i\}$ на τ следует отличие от нуля определителя Грамма системы (8) и возможность отыскания путем обращения матрицы A единственного решения в виде вектора X .

Отметим, что в рамках задачи Молоденского известна вся информация, необходимая для вычисления интегралов a_{ij} и l_i по поверхности τ , входящих в (8). С одной стороны, это радиальное расстояние ρ до точки на теллуриде, которое может быть определено на основании данных о нормальных высотах, с другой — аномалии Δg силы тяжести.

Тем не менее на практике величины Δg , получаемые из измерений, отягощены неизбежными погрешностями, а система (8) при больших N может оказаться плохо обусловленной в силу ненадежности (см. напр., [2], с. 228) системы функций $\left\{\frac{1}{r_i}\right\}$. Учитывая

также условную корректность задачи Молоденского, что, в частности, связано с большой сложностью проверки требований ее разрешимости по имеющейся информации об измеренных Δg [5], в такой ситуации естественно воспользоваться для устойчивого определения коэффициентов ряда (1) методом регуляризации Тихонова [7], разработанным для решения некорректных задач.

Таким образом, полагая, что отягощенные ошибками измерений и заданные непрерывно на поверхности теллурида аномалии силы тяжести $\Delta g = \Delta g_{(d)}$ известны (точность результатов измерений характеризуется некоторой дисперсией d), будем в соответствии с методом регуляризации коэффициенты m_i ряда (1) искать под условием минимума сглаживающего функционала вида

$$\Phi_*(\Delta g, T) = \left\| \Delta g - \sum_{i=1}^N m_i \omega_i \right\|_{L_2(\tau)}^2 + \alpha \Omega(T), \quad (10)$$

где $\Omega(T)$ — стабилизирующий функционал (стабилизатор задачи), а параметр регуляризации α согласуется с точностью d исходных данных Δg , например, по невязке с помощью уравнения [7, 5]

$$\left\| \Delta g - \sum_{i=1}^N m_i \omega_i \right\|_{L_2(\tau)}^2 = d. \quad (11)$$

В [5] показано, что при решении задачи Молоденского методом регуляризации в качестве стабилизатора может быть выбран

$$\Omega(T) = \|T\|_q^2, \quad (q \geq 1) \quad (12)$$

— квадрат нормы потенциала на гильбертовом пространстве $\Gamma_2^q(\Sigma)$ с воспроизводящим ядром. Поэтому с учетом (12) скажем, что в нашем случае решение задачи можно отыскать на множестве $\Gamma_2^q(\Sigma)$ функций, гармонических вне сферы Бьерхаммара (регулярных на бесконечности), методом разложения $T \approx T_N$ по полной системе фундаментальных решений $\frac{1}{r_i} \in \Gamma_2^q(\Sigma)$ уравнения Лапласа и сводится к минимизации

$$\left\| \Delta g - \sum_{i=1}^N m_i \omega_i \right\|_{L_2(\tau)}^2 + \alpha \|T_N\|_q^2 = \min, \quad (13)$$

с определением α из (11). Причем для написания общего алгоритма необходимо получить выражение для квадрата нормы потенциала в пространстве $\Gamma_2^q(\Sigma)$. Следует также отметить, что, как и ранее, мы полагаем, что несущая поверхность σ_h находится внутри сферы Бьерхаммара, ибо последнее гарантирует непрерывность и ограниченность функций $\frac{1}{r_i}$ в области Σ и на ее границе и, следовательно, необходимые и достаточные условия [5] для отнесения $\left\{ \frac{1}{r_i} \right\}$ к гильбертовым пространствам $\Gamma_2^q(\Sigma)$ с воспроизводящим ядром.

Запишем выражение для $\|T_N\|_q^2$, найденное путем разложения $\frac{1}{r_i}$ в ряд шаровых функций $\Pi_{n_i}^q$, являющихся [5] ортонормированным базисом в $\Gamma_2^q(\Sigma)$

$$\|T_N\|_q^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_i m_j \left[\frac{1}{R_B^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k_n^q} h_{ij}^n P_n(\cos \Psi_{ij}) \right]. \quad (14)$$

В (14) R_B — радиус сферы Бьерхаммара; $h_{ij} = (d_i d_j) / R_B^2 < 1$, что обеспечивает равномерную сходимость ряда по степеням h_{ij} ; Ψ_{ij} — сферическое расстояние (угол (d_i, d_j) между радиус-векторами d_i, d_j от начала координат до i -й и j -й точек на σ_h); k_n^q — коэффициенты разложения (см. [5, 8]) воспроизводящего ядра $K^q(A, B)$ пространства $\Gamma_2^q(\Sigma)$:

$$K^q(A, B) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n^q \left(\frac{R_B^3}{\rho_A \rho_B} \right) P_n(\cos \Psi_{A, B}), \quad (15)$$

$$k_n^q \sim \frac{c_q}{n^{2q-2}}, \quad c_q = \text{const}, \quad (16)$$

где ρ_A, ρ_B — радиусы-векторы точек A и B из области Σ ; $\Psi_{A, B}$ — угол (ρ_A, ρ_B) между ними (сферическое расстояние) с вершиной в начале координат.

При практическом использовании (14) в задаче (13) желательно просуммировать ряд по n для конкретно выбранных q (т. е. для заданных k_n^q). Не затрагивая здесь вопрос выбора q (индекса гильбертова пространства $\Gamma_2^q(\Sigma)$, на котором ищется решение), отметим, что после суммирования по n выражение (14) примет следующий вид:

$$\|T_N\|_q^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N m_i m_j F_{ij}^q, \quad (17)$$

причем функции F_{ij}^q суть результат суммирования. Например, для ядра Краупа [8] с $k_n^1 = 2$ легко определить, что

$$F_{ij}^1 = F_{ij}^{Kr} = \frac{1}{2 \sqrt{R_B^4 + d_i^2 d_j^2 - 2 d_i d_j R_B^2 \cos \Psi_{ij}}}, \quad (q=1). \quad (18)$$

Поэтому с учетом (17) перепишем (13) в форме

$$\left\| \Delta g - \sum_{i=1}^N m_i \omega_i \right\|_{L_2(\tau)}^2 + \alpha \left[\sum_{i=1}^N m_i \sum_{j=1}^N m_j F_{ij}^q \right] = \min \quad (19)$$

и из (19) найдем решение поставленной задачи в виде

$$X = (A + \alpha F)^{-1} L, \quad (20)$$

где матрица A , векторы X, L имеют тот же смысл и размерность, как и в (8), за исключением, что элементы l_j вектора L вычисляются теперь по величинам $\Delta g = \Delta g_{(d)}$, характеризуемым точностью d , матрица F — размерностью $(N \times N)$ типа $F = [F_{ij}^q]_{N, N}$; параметр регуляризации α находится по невязке с помощью (11).

Наконец, в случае не непрерывно, а дискретно заданных n значений аномалий Δg_j ($1 \leq j \leq n$) силы тяжести (что соответствует реальной практической ситуации), решение приходится искать из минимизации функционала

$$\|n\|_{E_n}^2 + \alpha \|T_N\|_q^2 = \min, \quad (21)$$

в котором

$$\bar{n} \|_{E_n} = \bar{n}^T C_{nn}^{-1} \bar{n}, \quad \bar{n} = \{\Delta g_j - M T_N(j)\}, \quad n > N, \quad (22)$$

причем $\bar{n}$ — вектор $(n \times 1)$ ошибок измерений, которые характеризуются заданной ковариационной матрицей C_{nn} , определяющей метрику в n -мерном евклидовом пространстве E_n [5]; $\|\cdot\|_{E_n}$ — норма в пространстве E_n .

После выполнения минимизации (21) с учетом (17), (22) вектор X искомым N параметров m_i (мы не приводим здесь подробного вывода) можно найти из матричного уравнения

$$X = (W^T C_{nn}^{-1} W + \alpha F)^{-1} W^T C_{nn}^{-1} L, \quad (23)$$

подбирая параметр α из условия

$$\bar{n}^T C_{nn}^{-1} \bar{n} = nd, \quad (24)$$

где d — дисперсия результатов измерений. В (23) $W = [\omega_{ji}]_{n,N}$ — матрица $(n \times N)$ с элементами $\omega_{ji} = \omega_i(j)$ из функций (4) ω_i вычисляемых в точках j с известными аномалиями Δg_j (индекс соответствует таковому в (4)); L — вектор $(n \times 1)$ значений Δg_j ; матрица F размерностью $(N \times N)$ имеет тот же смысл, что и в (20).

В заключение отметим, что при определенных условиях параметр регуляризации α можно положить равным единице и поэтому появляется возможность, не учитывая (24), находить решение только по (23), где $\alpha = 1$. Из монографии [5] следует, что такими условиями должны быть равномерность и равномерное распределение измеренных величин Δg_j на поверхности Земли, а также совпадение воспроизводящего ядра используемого гильбертова пространства $\Gamma_2^q(\Sigma)$ с эмпирической ковариационной функцией геопотенциала (фактически совпадение коэффициентов k_n^q разложения воспроизводящего ядра $K^q(A, B)$ со степенными дисперсиями возмущающего потенциала T). Последнее соответствует выбору воспроизводящего ядра [9] ($q=2,5$), для которого, кстати, найдено замкнутое выражение, и одновременно гарантирует минимальную из возможных среднюю квадратическую ошибку аппроксимации. К настоящему времени выяснено, что выполнение обсуждаемых условий обеспечивается приближенно лишь в глобальном и региональном масштабах. Поэтому использование алгоритма (23) с $\alpha=1$, естественно, будет оправдано при построении глобальных моделей точечных масс гравитационного потенциала, например, в целях спутниковой геодезии для прогнозирования положения ИСЗ методом численного интегрирования уравнений движения. В случае же аппроксимации с помощью (1) детального поля остается в силе применение (24) для определения параметра α .

На практике при реализации описанных алгоритмов (8), (20), (23) необходимо гарантировать также следующие условия, связывающие коэффициенты m_i : сумма их величин (точечных масс) должна равняться нулю, а центр масс получаемой многоточечной модели целесообразно совместить с центром масс Земли. В случае выполнения этих условий величина $T_N \approx T$, определяемая выражением (1), не содержит шаровых функций нулевой и первой степени и тем самым гарантирует принадлежность $T_N \in \Gamma_2^q(\Sigma)$ к корректному множеству решений $\Gamma_2^q(\Sigma)$.

Список литературы: 1. Алексидзе М. А. Об одном представлении аномального гравитационного поля. — ДАН СССР, 1966, т. 170, № 4. 2. Алексидзе М. А. Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функци-

ям. — М.: Наука, 1978. 3. Марченко А. Н. О некоторых теоретических аспектах представления геопотенциала потенциалом системы точечных масс. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1982, № 3. 4. Марченко А. Н. О разложении потенциалов планеты по системе фундаментальных решений уравнения Лапласа. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1982, № 4. 5. Нейман Ю. М. Вариационный метод физической геодезии. — М.: Недра, 1979. 6. Пеллини Л. П. Методика разложения гравитационного потенциала по сферическим функциям. — Тр. ЦНИИГАиК, М., 1966, вып. 171. 7. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. 8. Krutrup T. A contribution to the mathematical foundation of physical geodesy, Danish Geod. Inst., Publ. No 44, Copenhagen, 1969. 9. Tscherning C. C., Rapp R. H. Closed covariance expressions for gravity anomalies, geoid undulations and deflection of vertical implied by anomaly degree variance models, Report No 208, Dept. of Geodetic Science, Ohio State Univer., Columbus, 1974.

Статья поступила в редколлегию 08. 01. 82

ВРАК 828.21/22

А. Н. МАРЧЕНКО

О СТАБИЛИЗАТОРАХ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МНОГОТОЧЕЧНОЙ МОДЕЛИ ГЕОПОТЕНЦИАЛА ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Задача построения математической модели возмущающего потенциала T Земли в виде суммы потенциалов точечных масс, расположенных внутри планеты (представление T рядом фундаментальных решений $\left\{ \frac{1}{r_i} \right\}$ уравнения Лапласа), имеет определенные преимущества перед классическим разложением T по системе шаровых функций. Однако главным недостатком первого описания T перед вторым является неоднозначность выбора базисной системы $\left\{ \frac{1}{r_i} \right\}$ неортогональных функций (r_i — расстояние от i -й точечной массы до текущей точки). Действительно, если система $\left\{ \frac{1}{r_i} \right\}$ задана, то определение коэффициентов m_i разложения T (величин точечных масс) возможно и единственно [1, 4]. В то же время функции $\frac{1}{r_i}$ определенным образом связаны с некоторой «несущей» точечные массы m_i поверхностью σ_h с тем лишь ограничением, что последняя должна быть поверхностью Ляпунова. Поэтому имеется большая свобода выбора σ_h , а значит, и функций $\left\{ \frac{1}{r_i} \right\}_{\sigma_h}$ (точки $i \in \sigma_h$), обуславливающих заданную точность аппроксимации. Таким образом, подход к указанной задаче, как к некорректной, является естественным, что приводит к использованию в этом случае методов решения некорректных задач.