УДК 528.22

И. Ф. МОНИН

ОБ УЧЕТЕ БЛИЗКИХ И ДАЛЬНИХ ЗОН ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ВЫСОТ ГЕОИДА И УКЛОНЕНИЙ ОТВЕСА

Вычисление высот геоида и уклонений отвеса приближенно выполняют по формулам Стокса и Венинг—Мейнеса, пользуясь палеткой В. Ф. Еремеева и гравиметрической картой аномалий силы тяжести. При этом специально выделяют вокруг определяемой точки так называемую центральную зону и последующие зоны. Численное интегрирование при помощи палетки обычно делают, ограничиваясь областью интеграции до 1000—2000 км вокруг определяемой точки. Поправки за оставшуюся часть интегрирования (за дальние зоны) должны вводиться, но не вводятся, поскольку считается, что они незначительны.

На специальной модели, близкой к геоиду Земли, покажем влияние близких и дальних зон интегрирования при определении высот геоида и уклонений отвеса.

В качестве модели геоида примем уровенный эллипсоид Красовского с полуосью a и сжатием α. За отсчетную поверхность возьмем уровенный эллипсоид вращения, у которого большая полуось такая же, а малая — на 100 м больше, чем в эллипсоиде Красовского. Аномалии силы тяжести Δg, высоты геоида ζ, уклонения отвеса в плоскости меридиана ξ и разность гравитационных потенциалов $W_0—U_0$ на геоиде и уровенном отсчетном эллипсоиде, как известно, для данной модели с относительной погрешностью порядка сжатия α определяются по следующим формулам:

$$\Delta g = g_e \Delta\beta \sin^2\Phi; \quad \zeta = a\Delta\beta \sin^2\Phi, \tag{1}$$

$$\xi = -\Delta\beta \sin 2\Phi; \quad W_0 - U_0 = \frac{2}{3} a g_e \Delta\beta, \tag{2}$$

где g_e — экваториальная постоянная силы тяжести, $\Delta\beta = \beta - \beta' = -0{,}0000158$ — разность коэффициентов нормальной формулы для силы тяжести на геоиде и на отсчетном уровенном эллипсоиде, $a = 6378245$ м.

Займемся определением высот геоида для данной модели по формуле Стокса:

$$\zeta = \frac{a}{4\pi}\int \frac{\Delta g}{g_e}[S(\psi) - 1]\, d\sigma + \frac{W_0 - U_0}{g_e}, \tag{3}$$

где

$$S(\psi) - 1 = \frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}} - 6\sin\frac{\psi}{2} - 5\cos\psi - 3\cos\psi \ln\left(\sin^2\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\right);$$

$$d_\sigma = \sin\psi\, d\psi\, dA, \quad \sin\Phi = \sin\Phi_0\cos\psi + \cos\Phi_0 \sin\psi\cos A,$$

ψ — угловое расстояние на сфере между данной точкой, геоцентрическая широта которой Φ_0, и текущей точкой с широтой Φ. Угол на сфере между дугами больших кругов $90°-\Phi_0$ и ψ мы обозначили через A.

Подставляя данные модели в формулу Стокса (3), получаем

$$\zeta = \frac{a\Delta\beta}{4\pi}\int_0^{\psi}\int_0^{2\pi}\left(\sin^2\Phi_0\cos^2\psi + \frac{1}{2}\sin 2\Phi_0 \sin 2\psi\cos A + \right.$$

$$\left. + \cos^2\Phi_0\sin^2\psi\cos^2 A\right)[S(\psi)-1]\sin\psi\, d\psi\, dA + \frac{2}{3}a\Delta\beta.$$

Пределы интегрирования по переменной ψ мы умышленно берем не от 0° и до 180°, а от 0° и до произвольного ψ, чтобы потом учесть влияние близких и дальних зон интегрирования. Пределы интегрирования по переменной A мы взяли от 0° и до 360°.

Принимая во внимание вид функции Стокса $S(\psi)$, найдем значения возникающих при этом интегралов:

$$\int_0^{\psi}\frac{\cos^2\psi}{\sin\frac{\psi}{2}}\sin\psi\, d\psi = 4\sin\frac{\psi}{2} - \frac{16}{3}\sin^3\frac{\psi}{2} + \frac{16}{5}\sin^5\frac{\psi}{2};$$

$$\int_0^{\psi}\cos^2\psi\sin\frac{\psi}{2}\sin\psi\, d\psi = \frac{4}{3}\sin^3\frac{\psi}{2} - \frac{16}{5}\sin^5\frac{\psi}{2} + \frac{16}{7}\sin^7\frac{\psi}{2};$$

$$\int_0^{\psi}\cos^3\psi\sin\psi\, d\psi = \frac{1}{4}(1-\cos^4\psi);$$

$$\int_0^{\psi}\cos^3\psi\ln\left(\sin^2\frac{\psi}{2}+\sin\frac{\psi}{2}\right)\sin\psi\, d\psi = \frac{1}{4}(1-\cos^4\psi)\ln\times$$

$$\times\left(\sin^2\frac{\psi}{2}+\sin\frac{\psi}{2}\right) - \sin^2\frac{\psi}{2} - \frac{2}{3}\sin^3\frac{\psi}{2} + 2\sin^4\frac{\psi}{2} +$$

$$+ \frac{4}{5}\sin^5\frac{\psi}{2} - 2\sin^6\frac{\psi}{2} - \frac{4}{7}\sin^7\frac{\psi}{2} + \sin^8\frac{\psi}{2};$$

$$I_1 = \int_0^{\psi}\cos^2\psi[S(\psi)-1]\sin\psi\, d\psi = 4\sin\frac{\psi}{2} - \frac{34}{3}\sin^3\frac{\psi}{2} +$$

$$+ 3\sin^2\frac{\psi}{2} - 6\sin^4\frac{\psi}{2} - \frac{5}{4} + \frac{5}{4}\cos^4\psi + 20\sin^5\frac{\psi}{2} + 6\sin^6\frac{\psi}{2} -$$

$$-12\sin^7\frac{\psi}{2}-3\sin^8\frac{\psi}{2}-\frac{3}{4}(1-\cos^4\psi)\ln\left(\sin^2\frac{\psi}{2}+\sin\frac{\psi}{2}\right).$$

Нам еще понадобится интеграл, который вычисляется так:

$$I_2=\int\limits_0^{\psi}\sin\psi\,[S(\psi)-1]\,d\psi=-\frac{3}{2}\sin^2\psi\ln\left(\sin^2\frac{\psi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2}\right)+$$

$$+4\sin\frac{\psi}{2}-7\sin^2\frac{\psi}{2}-6\sin^3\frac{\psi}{2}+7\sin^4\frac{\psi}{2}.$$

Теперь, имея интегралы I_1 и I_2 и зная, что

$$\int\limits_0^{2\pi}dA=2\pi;\quad \int\limits_0^{2\pi}\cos A\,dA=0;\quad \int\limits^{2\pi}\cos^2 A\,dA=\pi,$$

получаем

$$\zeta=\frac{a}{4\pi}\Delta\beta\left\{\sin^2\Phi_0\cdot 2\pi\cdot I_1+\cos^2\Phi_0\cdot\pi\,(I_2-I_1)\right\}+$$

$$+\frac{2}{3}a\Delta\beta=a\Delta\beta\left(\frac{3}{4}I_1-\frac{1}{4}I_2\right)\sin^2\Phi_0+\alpha\Delta\beta\left(\frac{2}{3}+\frac{I_2-I_1}{4}\right),\quad (4)$$

а при

$$\psi=180^\circ,\quad I_1=\frac{2}{3},\quad I_2=-2 \text{ и } \zeta=a\Delta\beta\sin^2\Phi_0-$$

как и должно быть.

Далее определим уклонение отвеса в плоскости меридиана эллипсоида для принятой модели по формуле Венинг—Мейнеса:

$$\xi=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\Delta g}{g_e}Q(\psi)\cos A\,d\psi\,dA,$$

$$Q(\psi)=\cos^2\frac{\psi}{2}\left[\frac{1}{\sin\frac{\psi}{2}}+12\sin\frac{\psi}{2}-32\sin^2\frac{\psi}{2}+\frac{3}{1+\sin\frac{\psi}{2}}-\right.$$

$$\left.-12\sin^2\frac{\psi}{2}\ln\left(\sin^2\frac{\psi}{2}+\sin\frac{\psi}{2}\right)\right].\quad (5)$$

Подставляя аномалии силы тяжести в формулу (5), получаем:

$$\xi=-\frac{\Delta\beta}{4\pi}\int\limits_0^{\psi}\int\limits_0^{2\pi}(\sin^2\Phi_0\cos^2\psi+\sin 2\Phi_0\cos\psi\sin\psi\cos A+$$

$$+\cos^2\Phi_0\sin^2\psi\cos^2 A)\,Q(\psi)\cos A\,d\psi\,dA.$$

Зная вид функции Венинг—Мейнеса $Q(\psi)$, найдем значения возникающих при этом интегралов

$$\int_0^{\psi} \cos^2\frac{\psi}{2}\cos\psi\sin\psi\,\frac{d\psi}{\sin\frac{\psi}{2}} = 4\sin\frac{\psi}{2} - 4\sin^3\frac{\psi}{2} + \frac{8}{5}\sin^5\frac{\psi}{2};$$

$$\int_0^{\psi} \cos^2\frac{\psi}{2}\sin\frac{\psi}{2}\cos\psi\sin\psi\,d\psi = \frac{4}{3}\sin^3\frac{\psi}{2} - \frac{12}{5}\sin^5\frac{\psi}{2} + \frac{8}{7}\sin^7\frac{\psi}{2};$$

$$\int_0^{\psi} \cos^2\frac{\psi}{2}\sin^2\frac{\psi}{2}\cos\psi\sin\psi\,d\psi = \sin^4\frac{\psi}{2} - 2\sin^6\frac{\psi}{2} + \sin^8\frac{\psi}{2};$$

$$\int_0^{\psi} \cos^2\frac{\psi}{2}\cos\psi\sin\psi\,\frac{d\psi}{1+\sin\frac{\psi}{2}} = 2\sin^2\frac{\psi}{2} - \frac{4}{3}\sin^3\frac{\psi}{2} - $$

$$- 2\sin^4\frac{\psi}{2} + \frac{8}{5}\sin^5\frac{\psi}{2};$$

$$\int_0^{\psi} \cos^2\frac{\psi}{2}\sin^2\frac{\psi}{2}\sin\psi\cos\psi\ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right)d\psi = \frac{1}{16}\sin^4\psi\ln\times$$

$$\times\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right) - \frac{1}{4}\sin^4\frac{\psi}{2} - \frac{1}{5}\sin^5\frac{\psi}{2} + \frac{1}{2}\sin^6\frac{\psi}{2} +$$

$$+ \frac{1}{7}\sin^7\frac{\psi}{2} - \frac{1}{4}\sin^8\frac{\psi}{2};$$

$$I_3 = \int_0^{\psi} \cos\psi\sin\psi\,Q(\psi)\,d\psi = 4\sin\frac{\psi}{2} + 6\sin^2\frac{\psi}{2} + 8\sin^3\frac{\psi}{2} - 35\sin^4\frac{\psi}{2} -$$

$$- 20\sin^5\frac{\psi}{2} + 58\sin^6\frac{\psi}{2} + 12\sin^7\frac{\psi}{2} - 29\sin^8\frac{\psi}{2} -$$

$$- \frac{3}{4}\sin^4\psi\ln\left(\sin^2\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\right).$$

Так как $\int_0^{2\pi} \cos^3 A\,dA = 0$, окончательная формула для определения уклонения отвеса имеет вид:

$$\xi = -\frac{I_3}{4}\Delta\beta\sin 2\Phi_0. \qquad (6)$$

При $\psi = 180^\circ$, $I_3 = 4$ и $\xi = -\Delta\beta\sin 2\Phi_0$ — как и должно быть.

Влияние зон на ζ и ξ

Φ_0	ζ, м	ξ''
3′	$0{,}088 \sin^2\Phi_0+67{,}184$	$0{,}001 \sin 2\Phi_0$
1°	$1{,}542 \sin^2\Phi_0+67{,}184$	$0{,}029 \sin 2\Phi_0$
10°	$13{,}030 \sin^2\Phi_0+67{,}235$	$0{,}323 \sin 2\Phi_0$
20°	$10{,}747 \sin^2\Phi_0+67{,}072$	$0{,}708 \sin 2\Phi_0$
90°	$68{,}738 \sin^2\Phi_0+22{,}013$	$2{,}223 \sin 2\Phi_0$
160°	$95{,}535 \sin^2\Phi_0-0{,}164$	$3{,}241 \sin 2\Phi_0$
180°	$100{,}776 \sin^2\Phi_0$	$3{,}259 \sin 2\Phi_0$

В таблице для различных значений ψ вычислены высоты геоида и уклонения отвеса по формулам (4) и (6). Области интегрирования взяты примерно от нуля до 5 км, 100, 1000, 2000 км и более. Влияние близких и дальних зон хорошо прослеживается по табличным данным. Обнаружено принципиальное различие в вычислениях по формуле Стокса и Венинг—Мейнеса. В вычислениях по формуле Стокса выделяется постоянная часть. Как легко заметить, сначала (в зоне от нуля и, примерно, до 2000 км) она получается из-за различия потенциалов W_0-U_0 на геоиде и на уровенном отсчетном эллипсоиде. Затем начинает больше влиять аномальная часть гравитационного поля модели. Связи между высотами геоида и уклонениями отвеса нет, так как влияние зон на них разное.

Хорошо также видны из таблицы погрешности в высотах геоида и уклонениях отвеса из-за неучета дальних зон при интегрировании, причем они значительные и пренебрегать ими нельзя.

В заключение отметим, что только интегрируя по всей поверхности Земли по формулам Стокса и Венинг—Мейнеса, получаем правильные результаты высот геоида и уклонений отвеса.

Статья поступила в редколлегию 12. 01. 81