

И. И. МОНИН

## ПРИМЕНЕНИЕ ЕДИНОГО АЛГОРИТМА УРАВНИВАНИЯ К ОБРАБОТКЕ НИВЕЛИРОВОК

В статье [1] предложен алгоритм, позволяющий уравнивать триангуляцию, трилатерацию и линейно-угловую сеть коррелатным методом с использованием ЭВМ. Его суть в следующем: все измерения делятся на необходимые и избыточные. Для тех и других составляются уравнения поправок

$$A_1 X + L_1 = V_1 \quad \text{и} \quad A_2 X + L_2 = V_2, \quad (1)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — матрицы коэффициентов при поправках в координаты определяемых пунктов сети;  $X$  — матрица-столбец поправок в координаты;  $L_1$  и  $L_2$  — матрицы-столбцы свободных членов;  $V_1$  и  $V_2$  — матрицы-столбцы поправок в измеренные величины (необходимые и избыточные соответственно).

Исключив из этих уравнений  $X$ , получим условное уравнение

$$A_2 A_1^{-1} (V_1 - L_1) - V_2 + L_2 = 0. \quad (2)$$

Решая его по методу наименьших квадратов, находим коррелаты

$$K = -(AA^T)^{-1} W, \quad (3)$$

а затем и поправки

$$V = A^T K, \quad (4)$$

где  $A$  — матрица коэффициентов при поправках условного уравнения (2),  $W$  — матрица-столбец свободных членов,  $A^T$  — транспонированная матрица.

В настоящей статье показана возможность уравнивания нивелирной сети по предложенному алгоритму.

Рассмотрим сеть, изображенную на рисунке (стрелками показано убывание высот) [2]. Примем высоту пункта  $a$  за нуль. Превышения между пунктами равны:  $h_1 = 20,21$  м,  $h_2 = 40,07$  м,  $h_3 = -34,17$  м,  $h_4 = 35,84$  м,  $h_5 = 60,40$  м,  $h_6 = 5,87$  м,  $h_7 = 69,99$  м. Получим приближенные значения высот пунктов  $b$ ,  $c$ ,  $d$  и  $e$  по превышениям  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ ,  $h_4$ :  $H_b = 20,21$  м,  $H_c = -40,07$  м,  $H_d = -34,17$  м,  $H_e = 35,84$  м. Измерения  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  и  $h_4$  будем считать необходимыми;  $h_5$ ,  $h_6$  и  $h_7$  — избыточными. Тогда уравнения поправок примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta_b + l_1 &= V_1, & l_1 &= H_b - H_a - h_1, \\ -\delta_c + l_2 &= V_2, & l_2 &= H_c - H_a + h_2, \\ -\delta_d + l_3 &= V_3, & l_3 &= H_d - H_a + h_3, \\ \delta_e + l_4 &= V_4, & l_4 &= H_e - H_a - h_4, \\ \delta_b - \delta_c + l_5 &= V_5, & l_5 &= H_b - H_c - h_5, \\ \delta_d - \delta_c + l_6 &= V_6, & l_6 &= H_d - H_c - h_6, \\ \delta_e - \delta_d + l_7 &= V_7, & l_7 &= H_e - H_d - h_7, \end{aligned}$$

$\delta$  — поправки в высоты пунктов,  $l_i$  — свободные члены,  $V_i$  — поправки в измеренные величины.

Так как приближенные значения высот пунктов находились по необходимым измерениям, то следует  $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 0$ .

Теперь запишем уравнения (1):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_b \\ \delta_c \\ \delta_d \\ \delta_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_b \\ \delta_c \\ \delta_d \\ \delta_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,12 \\ 0,03 \\ 0,02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{pmatrix},$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad L_1 = \begin{pmatrix} -0,12 \\ 0,03 \\ 0,02 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицы  $A_1^{-1}$  и  $A_2 A_1^{-1}$ :

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_2 A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (2) примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,12 \\ 0,03 \\ 0,02 \end{pmatrix} = 0.$$

Матрицы  $A$ ,  $A^T$ ,  $(AA^T)^{-1}$  уравнения (3):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(AA^T)^{-1} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 8 & -3 & -1 \\ -3 & 9 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Вычислим коррелаты  $K_i$ :

$$K = -\frac{1}{21} \begin{pmatrix} 8 & -3 & -1 \\ -3 & 9 & 3 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0,12 \\ 0,03 \\ 0,02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0510 \\ 0,0329 \\ 0,0176 \end{pmatrix}.$$

По формуле (4) найдем поправки  $V_i$  в измеренные величины:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,0510 \\ -0,0329 \\ -0,0176 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,051 \\ 0,018 \\ 0,015 \\ -0,018 \\ -0,051 \\ 0,033 \\ 0,018 \end{pmatrix}.$$

Уравненные значения  $h_i$  будут:

$$\begin{aligned} h_1 &= 20,261 \text{ м}, & h_4 &= 35,822 \text{ м}, & h_6 &= 5,903 \text{ м}, \\ h_2 &= 40,088 \text{ м}, & h_5 &= 60,349 \text{ м}, & h_7 &= 70,008 \text{ м}, \\ h_3 &= 34,185 \text{ м}, \end{aligned}$$

Для контроля полученных величин просуммируем превышения по трем полигонам:

$$\begin{aligned} h_1 - h_5 + h_2 &= 20,261 - 60,349 + 40,088 = 0, \\ h_3 - h_2 + h_6 &= 34,185 - 40,088 + 5,903 = 0, \\ h_7 - h_3 - h_4 &= 70,008 - 34,185 - 35,822 = 0,001. \end{aligned}$$

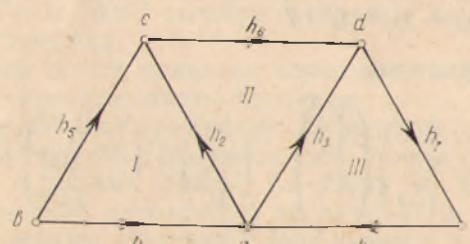


Схема сети нивелирования.

Сравним изложенный выше метод с классическим параметрическим методом, содержание которого сводится к следующему:

$$BX + L = V, \quad (5) \quad B^T BX + B^T L = 0, \quad (6)$$

$$X = -(B^T B)^{-1} B^T L; \quad (7) \quad V = -B(B^T B)^{-1} B^T L + L. \quad (8)$$

Здесь  $B$  — матрица коэффициентов;  $X$  — матрица поправок в координаты определяемых пунктов;  $V$  — матрица поправок в измеренные превышения;  $L$  — матрица свободных членов; (5) — уравнение поправок, (6) — нормальное уравнение. Уравняем по этому методу сеть, изображенную на рисунке.

Матрицы  $B$ ,  $B^T$  и  $B^T B$  будут:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^T B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Уравнение (6) принимает вид

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_b \\ \delta_c \\ \delta_d \\ \delta_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \\ l_6 \\ l_7 \end{pmatrix} = 0.$$

Вычислив элементы матрицы  $(B^T B)^{-1}$ , получим

$$(B^T B)^{-1} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 13 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 10 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 10 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 13 \end{pmatrix}.$$

Подставим все полученные матрицы в уравнение (8) и вычислим значения поправок  $V_i$ :

$$V = \dots = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 & 1 & 8 & -3 & -1 \\ -5 & 10 & 4 & -2 & 5 & 6 & 2 \\ -2 & 4 & 10 & -5 & 2 & -6 & 5 \\ 1 & -2 & -5 & 13 & -1 & 3 & 8 \\ 8 & 5 & 2 & -1 & 13 & 3 & 1 \\ -3 & 6 & -6 & 3 & 3 & 12 & -3 \\ -1 & 2 & 5 & 8 & 1 & -3 & 13 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,12 \\ 0,03 \\ 0,02 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,12 \\ -0,03 \\ 0,02 \end{pmatrix},$$

$$V_1 = 0,051, \quad V_3 = 0,015, \quad V_5 = -0,051, \quad V_7 = 0,018,$$

$$V_2 = 0,018, \quad V_4 = -0,018, \quad V_6 = 0,033,$$

Таким образом, поправки, полученные параметрическим методом уравнивания, равны поправкам, полученным с помощью единого алгоритма.

Во всех произведенных вычислениях веса не учитывались, так как длины всех ходов приблизительно равны.

Следовательно, на основании выполненных вычислений заключаем, что предложенный нами единый алгоритм уравнивания геодезических сетей [1] можно применять и при обработке нивелировок.

**Список литературы:** 1. Монин И. И. Единый алгоритм составления условных уравнений в геодезических сетях. — Геодезия, картография и аэрофототеория обработки наблюдений. — М.: Госиздат, 1958.

Статья поступила в редакцию 15. 01. 82

УДК 528.21/22

И. Ф. МОНИН

## К ОПРЕДЕЛЕНИЮ МАССЫ И ПОТЕНЦИАЛА ЗЕМЛИ

В настоящее время постоянную  $fM$  — произведение гравитационной постоянной на массу Земли, или, как ее стали называть, геоцентрическую гравитационную постоянную, уверенно определяют из наблюдения космических летательных аппаратов, запускаемых к планетам [2, 7]. Определение гравитационного потенциала  $W_0$  в исходном пункте нивелировок основано на совместном использовании данных спутниковых наблюдений и наземных геодезических измерений [2, 7, 8].

Постоянные  $fM$ ,  $W_0$  и др. принято называть основными параметрами уровенного эллипсоида нормальной Земли, причем, как известно [1]:

$$fM = a^2 g_e \left( 1 - \alpha + \frac{3}{2} q - \frac{15}{14} \alpha q - \dots \right), \quad (1)$$

$$W_0 = a g_e \left( 1 - \frac{2}{3} \alpha + \frac{11}{6} q - \frac{1}{5} \alpha^2 - \frac{4}{7} \alpha q - \dots \right), \quad (2)$$

где  $a$  — большая полуось эллипсоида;  $\alpha$  — его сжатие;  $g_e$  — экваториальная постоянная земного ускорения;  $q = \omega^2 a / g_e$ ;  $\omega$  — угловая скорость суточного вращения Земли.

Уже давно М. С. Молоденский показал возможность определения  $g_e$  из обработки измерений ускорения силы тяжести на поверхности Земли. Можно надеяться, что в ближайшие годы прямые определения  $g_e$  будут чаще применяться, так как сейчас интенсивно ведутся гравиметрические съемки на суше и на водной поверхности Мирового океана.

Совместная обработка спутниковых данных и наземных измерений позволяет весьма надежно определять  $a$ ,  $\alpha$ ,  $g_e$  и др. па-

рами нормального гравитационного поля Земли, а также уточнять фигуру и гравитационное поле.

В статьях [3—6] показана возможность и получены формулы уточнения массы и потенциала Земли на основании аномалий силы тяжести и их производных. В этой статье предлагаются аналогичные формулы для определения тех же величин по аномалиям силы тяжести и высотам геоида.

Напишем известные соотношения теории фигуры Земли:

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{2T}{\rho} = -\Delta g + \frac{2}{\rho} (W_0 - U_0), \quad (3)$$

$$T = g_e \zeta + W_0 - U_0, \quad (4)$$

$T$  — возмущающий гравитационный потенциал во внешнем пространстве;  $\Delta g$  — смешанная аномалия силы тяжести;  $\rho$  — расстояние от центра земного эллипсоида до текущей точки поверхности Земли;  $W_0$ ,  $U_0$  — гравитационные потенциалы Земли на уровне моря и уровенного земного эллипсоида на его поверхности;  $\zeta$  — расстояние между эллипсоидом и геоидом (высота геоида);  $U_0$  — граничное условие для возмущающего потенциала или осцилляторное уравнение гравиметрии.

Представляя возмущающий потенциал во внешнем пространстве, аномалии силы тяжести и высоты геоида на сфере радиуса  $R$  рядами сферических функций:

$$T = \sum_0^{\infty} \left( \frac{a}{\rho} \right)^{n+1} T_n, \quad (5) \quad \Delta g = \sum_0^{\infty} \Delta g_n, \quad \zeta = \sum_0^{\infty} \zeta_n, \quad (6)$$

где  $T_n$ ,  $\Delta g_n$ ,  $\zeta_n$  — сферические функции  $n$ -го порядка в разложении возмущающего потенциала, аномалий силы тяжести и высот геоида, легко получить на основании (3), (4), (5), (6) зависимости между сферическими функциями нулевого порядка:

$$T_0 = -a \Delta g_0 + 2(W_0 - U_0), \quad (7)$$

$$T_0 = g_e \zeta_0 + W_0 - U_0. \quad (8)$$

Для текущей точки внешнего пространства имеет место следующее разложение для возмущающего потенциала:

$$T = W_r - W_e = V_r - V_e = \frac{f\Delta M}{\rho} + \dots, \quad (9)$$

где  $W$  — потенциал силы тяжести геоида или уровенного эллипсоида,  $V$  — потенциал притяжения;  $\Delta M$  — разность масс геоида и уровенного эллипсоида.

Следовательно, сферическая функция нулевого порядка в разложении возмущающего потенциала может быть выражена и так:

$$T_0 = \frac{f\Delta M}{a}. \quad (10)$$