Во всех произведенных вычислениях веса не учитывались, так как длины всех ходов приблизительно равны.

Следовательно, на основании выполненных вычислений заключаем, что предложенный нами единый алгоритм уравнивания геодезических сетей [1] можно применять и при обработке нивелировок.

Список литературы: 1. *Монин И. И.* Единый алгоритм составления условных уравнений в геодезических сетях. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1982, вып. 35. 2. *Линник Ю. В.* Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. — М.: Госиздат, 1958.

Статья поступила в редколлегию 15. 01. 82

УДК 528.21/22

И. Ф. МОНИН

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ МАССЫ И ПОТЕНЦИАЛА ЗЕМЛИ

В настоящее время постоянную fM — произведение гравитационной постоянной на массу Земли, или, как ее стали называть, геоцентрическую гравитационную постоянную, уверенно определяют из наблюдения космических летательных аппаратов, запускаемых к планетам [2, 7]. Определение гравитационного потенциала W_0 в исходном пункте нивелировок основано на совместном использовании данных спутниковых наблюдений и наземных геодезических измерений [2, 7, 8].

Постоянные fM, W_0 и др. принято называть основными параметрами уровенного эллипсоида нормальной Земли, причем, как известно [1]:

$$fM = a^2 g_e\left(1 - \alpha + \frac{3}{2}q - \frac{15}{14}\alpha q - \dots\right), \tag{1}$$

$$W_0 = a g_e\left(1 - \frac{2}{3}\alpha + \frac{11}{6}q - \frac{1}{5}\alpha^2 - \frac{4}{7}\alpha q - \dots\right), \tag{2}$$

где a — большая полуось эллипсоида; α — его сжатие; g_e — экваториальная постоянная земного ускорения; $q = \omega^2 a/g_e$; ω — угловая скорость суточного вращения Земли.

Уже давно М. С. Молоденский показал возможность определения g_e из обработки измерений ускорения силы тяжести на поверхности Земли. Можно надеяться, что в ближайшие годы прямые определения g_e будут чаще применяться, так как сейчас интенсивно ведутся гравиметрические съемки на суше и на водной поверхности Мирового океана.

Совместная обработка спутниковых данных и наземных измерений позволяет весьма надежно определять a, α, g_e и др. параметры нормального гравитационного поля Земли, а также уточнять фигуру и гравитационное поле.

В статьях [3—6] показана возможность и получены формулы для уточнения массы и потенциала Земли на основании аномалий силы тяжести и их производных. В этой статье предлагаются аналогичные формулы для определения тех же величин по аномалиям силы тяжести и высотам геоида.

Напишем известные соотношения теории фигуры Земли:

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{2T}{\rho} = -\Delta g + \frac{2}{\rho}(W_0 - U_0), \tag{3}$$

$$T = g_e\zeta + W_0 - U_0, \tag{4}$$

где T — возмущающий гравитационный потенциал во внешнем пространстве; Δg — смешанная аномалия силы тяжести; ρ — расстояние от центра земного эллипсоида до текущей точки поверхности Земли; W_0, U_0 — гравитационные потенциалы Земли на уровне моря и уровенного земного эллипсоида на его поверхности; ζ — расстояние между эллипсоидом и геоидом (высота геоида); (3) — граничное условие для возмущающего потенциала или основное уравнение гравиметрии.

Представляя возмущающий потенциал во внешнем пространстве, аномалии силы тяжести и высоты геоида на сфере радиуса a рядами сферических функций:

$$T = \sum_0^\infty \left(\frac{a}{\rho}\right)^{n+1} T_n, \quad (5) \qquad \Delta g = \sum_0^\infty \Delta g_n, \quad \zeta = \sum_0^\infty \zeta_n, \tag{6}$$

где T_n, Δg_n, ζ_n — сферические функции n-го порядка в разложении возмущающего потенциала, аномалий силы тяжести и высот геоида, легко получить на основании (3), (4), (5), (6) зависимости между сферическими функциями нулевого порядка:

$$T_0 = -a\Delta g_0 + 2(W_0 - U_0), \tag{7}$$

$$T_0 = g_e\zeta_0 + W_0 - U_0. \tag{8}$$

Для текущей точки внешнего пространства имеет место следующее разложение для возмущающего потенциала:

$$T = W_г - W_e = V_г - V_e = \frac{f\Delta M}{\rho} + \dots, \tag{9}$$

где W — потенциал силы тяжести геоида или уровенного эллипсоида, V — потенциал притяжения; ΔM — разность масс геоида и уровенного эллипсоида.

Следовательно, сферическая функция нулевого порядка в разложении возмущающего потенциала может быть выражена и так:

$$T_0 = \frac{f\Delta M}{a}. \tag{10}$$

В результате на основании (7), (8), (10) получаем следующие зависимости:

$$\frac{f\Delta M}{a} = -a\Delta g_0 + 2(W_0 - U_0), \tag{11}$$

$$\frac{f\Delta M}{a} = g_e\zeta_0 + W_0 - U_0. \tag{12}$$

Применяя к Δg_0 и ζ_0 в равенствах (11) и (12) теорему восстановления сферических функций

$$F_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int F P_n(\cos\psi)\, d\sigma, \quad F = \sum_0^\infty F_n, \tag{13}$$

где F — произвольная непрерывная функция сферических координат, заданная на сфере радиуса a; F_n — сферическая функция n-го порядка; $P_n(\cos\psi)$ — полином Лежандра; ψ — угловое расстояние между текущей и фиксированной точками сферы; $d\sigma$ — элемент поверхности единичной сферы, найдем:

$$\Delta g_0 = \frac{1}{4\pi}\int \Delta g\, d\sigma, \quad \zeta_0 = \frac{1}{4\pi}\int \zeta\, d\sigma, \tag{14}$$

а подставляя (14) в равенства (11) и (12), напишем два уравнения, определяющие $f\Delta M$ и W_0-U_0:

$$\frac{f\Delta M}{a} = -\frac{a}{4\pi}\int \Delta g\, d\sigma + 2(W_0 - U_0),$$

$$\frac{f\Delta M}{a} = \frac{g_e}{4\pi}\int \zeta\, d\sigma + W_0 - U_0.$$

Таким образом, предложенные формулы для уточнения массы и потенциала Земли имеют вид:

$$f\Delta M = \frac{a^2 g_e}{4\pi}\int\left(\frac{2\zeta}{a} + \frac{\Delta g}{g_e}\right)d\sigma, \tag{15}$$

$$W_0 - U_0 = \frac{a g_e}{4\pi}\int\left(\frac{\zeta}{a} + \frac{\Delta g}{g_e}\right)d\sigma. \tag{16}$$

Проверим формулы (15) и (16) на модели, взятой из работы [3]. В качестве геоида там принят уровенный эллипсоид Красовского; за отсчетную поверхность взят эллипсоид вращения, у которого большая полуось такая же, а малая на 100 м больше, чем у эллипсоида Красовского. Используемая модель имеет следующие характеристики гравитационного поля:

$$\Delta g = g_e \Delta\beta \sin^2\Phi, \quad \zeta = -a\Delta\alpha\sin^2\Phi, \tag{17}$$

где Φ — геоцентрическая широта, $\Delta\alpha=0{,}0000157$ — разность между сжатиями геоида и эллипсоида; $\Delta\beta=-0{,}0000158$ — разность между коэффициентами β в нормальной формуле для силы тяжести на геоиде и уровненном эллипсоиде.

Подставляя в формулы (15) и (16) вместо аномалий силы тяжести Δg и высот геоида ζ их выражения (17) и замечая, что

$$\int \sin^2\Phi\, d\sigma = \frac{4}{3}\pi,$$

будем иметь:

$$f\Delta M = \frac{a^2 g_e}{4\pi}\int(-2\Delta\alpha + \Delta\beta)\sin^2\Phi\, d\sigma = \frac{1}{3}a^2 g_e(-2\Delta\alpha + \Delta\beta), \tag{18}$$

$$W_0 - U_0 = \frac{a g_e}{4\pi}\int(-\Delta\alpha + \Delta\beta)\sin^2\Phi\, d\sigma = \frac{1}{3}a g_e(-\Delta\alpha + \Delta\beta). \tag{19}$$

Из формул (1) и (2) находим:

$$f\Delta M = -a^2 g_e \Delta\alpha, \quad (20) \qquad W_0 - U_0 = -\frac{2}{3}a g_e \Delta\alpha. \quad (21)$$

Сравнивая формулы (18) и (20), (19) и (21), видим, что результаты вычислений по ним отличаются друг от друга в пределах точности решения задачи сферического случая. Таким образом, формулы (15) и (16) позволяют вычислять $f\Delta M$ и W_0-U_0 с относительной погрешностью порядка сжатия Земли. Данные аномалий силы тяжести Δg и высот геоида ζ нужно брать из наземных и спутниковых наблюдений.

Список литературы: 1. *Жонголович И. Д.* Внешнее гравитационное поле и фундаментальные постоянные, связанные с ним. — Тр. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 1952, вып. 3. 2. *Машимов М. М.* Уравнивание геодезических сетей. — М.: Недра, 1979. 3. *Монин И. Ф.* К определению массы Земли. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1976, вып. 24. 4. *Монін І. Ф.* Про визначення гравітаційного потенціалу Землі на геоіді. — ДАН УРСР. Сер. Б, 1967, № 8. 5. *Монін І. Ф.* Про можливість визначення гравітаційного потенціалу Землі на геоіді з гравіметричних вимірів. — ДАН УРСР. Сер. Б, 1971, № 7. 6. *Монін І. Ф.* Про вибір гравітаційного потенціалу на еліпсоіді в теорії фігури Землі. — ДАН УРСР. Сер. Б, 1971, № 8. 7. *Пеллинен Л. П.* Высшая геодезия. — М.: Недра, 1978. 8. *Юркина М. И.* Потенциал в начале счета высот и контроль геометрического нивелирования. — Геодезия и картография, 1981, № 10.

Статья поступила в редколлегию 12. 11. 81