УДК 528.721.213

В. И. ПАВЛОВ

УРАВНЕНИЯ ОШИБОК КООРДИНАТ ТОЧЕК ВНЕШНЕ ОРИЕНТИРОВАННОЙ МОДЕЛИ

Ошибки определения элементов взаимного ориентирования аэроснимков, ошибки измерений фотограмметрических и геодезических координат опорных точек приводят к тому, что координаты точек внешне ориентированной модели искажены.

Получим уравнения деформации координат точек внешне ориентированной одиночной модели.

Ошибки Δ_X, Δ_Y, Δ_Z координат X, Y, Z точки j внешне ориентированной модели в общем виде характеризуются уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \Delta X_j &= dx_{1j} + dx_{2j} - dx_{3j} \\ \Delta Y_j &= dy_{1j} + dy_{2j} - dy_{3j} \\ \Delta Z_j &= dz_{1j} + dz_{2j} - dz_{3j} \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

где dx_1, dy_1, dz_1 — ошибки измерения координат x, y, z точки модели; dx_2, dy_2, dz_2 — ошибки координат точки модели, обусловленные погрешностью определения элементов взаимного ориентирования снимков; dx_3, dy_3, dz_3 — ошибки координат точки, обусловленные погрешностью определения элементов внешнего ориентирования модели.

Погрешности dx_2, dy_2, dz_2 функционально связаны с погрешностями dby, dbz, $d\Delta\varkappa$, $d\Delta\alpha$ и $d\Delta\omega$ определения элементов взаимного ориентирования пары снимков следующими известными уравнениями [1, 2]:

$$\left.\begin{aligned} dx_2 &= -\frac{xy}{b}d\Delta\varkappa + \frac{x(x-b)}{bZ}dbz + \frac{x\{(x-b)^2+Z^2\}}{bZ}d\Delta\alpha + \\ &\quad + \frac{x(x-b)y}{bZ}d\Delta\omega \\ dy_2 &= \frac{1}{2}dby + \left(\frac{x-b}{2} - \frac{y^2}{b}\right)d\Delta\varkappa + \left(\frac{x}{b} - \frac{1}{2}\right)\frac{y}{Z}dbz + \\ &\quad + \left\{\frac{(x-b)^2+Z^2}{b} + \frac{x-b}{2}\right\}\frac{y}{Z}d\Delta\alpha + \left\{\frac{y^2+Z^2}{2} + \frac{(x-b)y^2}{b}\right\}\frac{d\Delta\omega}{Z} \\ dz_2 &= \frac{Zy}{b}d\Delta\varkappa + \left(1-\frac{x}{b}\right)dbz - \frac{Z^2+(x-b)^2}{b}d\Delta\alpha - \frac{(x-b)y}{b}d\Delta\omega \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

где x, y — координаты точки модели, b — базис модели, Z — высота фотографирования в масштабе модели.

Ошибки dx_3, dy_3, dz_3 выражаются через ошибки определения элементов внешнего ориентирования модели dx_0, dy_0, dz_0, $d\lambda$, $d\theta$, $d\eta$ и $d\xi$ зависимостями

$$\left.\begin{aligned} dx_3 &= dx_0 + xd\lambda - yd\Theta \\ dy_3 &= dy_0 + yd\lambda + xd\Theta \\ dz_3 &= dz_0 + xd\eta + yd\xi \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Для упрощения последующих выводов примем, что начало координат совмещено с центром тяжести группы опорных точек. Тогда

$$\left.\begin{aligned} dx_3 &= dX_0 + Xd\lambda - Yd\Theta \\ dy_3 &= dV_0 + Yd\lambda + Xd\Theta \\ dz_3 &= dZ_0 + Xd\eta + Yd\xi \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

где

$$\left.\begin{aligned} & dX_0 = \frac{1}{n}\Sigma W_X,\ dV_0 = \frac{1}{n}\Sigma W_Y,\ dZ_0 = \frac{1}{n}\Sigma W_Z \\ & d\lambda = \frac{\Sigma X\cdot W_X + \Sigma Y\cdot W_Y}{\Sigma X^2 + \Sigma Y^2},\ d\Theta = \frac{\Sigma X\cdot W_Y - \Sigma Y\cdot W_X}{\Sigma X^2 + \Sigma Y^2} \\ & d\eta = -\frac{\Sigma X\cdot Y\cdot \Sigma Y\cdot W_Z - \Sigma Y^2\cdot \Sigma X\cdot W_Z}{\Sigma X^2\cdot \Sigma Y^2 - (\Sigma X\cdot Y)^2}, \\ & d\varepsilon = -\frac{\Sigma X\cdot Y\cdot \Sigma X\cdot W_Z - \Sigma X^2\cdot \Sigma Y\cdot W_Z}{\Sigma X^2\cdot \Sigma Y^2 - (\Sigma X\cdot Y)^2} \end{aligned}\right\}; \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} & X = x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \quad W_X = x - X \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\ \ W_Y = y - Y \\ & Y = y - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i; \quad W_Z = z - Z \end{aligned}\right\}, \tag{6}$$

Невязки W_X, W_Y, W_Z зависят от ошибок получения фотограмметрических и геодезических координат опорных точек модели и выражаются равенствами

$$\left.\begin{aligned} W_X &= dx_1 + dx_2 - dX \\ W_Y &= dy_1 + dy_2 - dY \\ W_Z &= dz_1 + dz_2 - dZ \end{aligned}\right\}, \tag{7}$$

где dX, dY, dZ — ошибки геодезических координат опорных точек модели.

Подставив выражения (2) и (4) с учетом (5) и (7) в (1), после преобразований получим

$$\left.\begin{aligned} \Delta X_j &= \delta x_{1j} + \delta x_{2j} + \delta x_{3j} \\ \Delta Y_j &= \delta y_{1j} + \delta y_{2j} + \delta y_{3j} \\ \Delta Z_j &= \delta z_{1j} + \delta z_{2j} + \delta z_{3j} \end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

где

$$
\left.
\begin{aligned}
\delta x_{1j} &= dx_{1j} - \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{B} (XX_i + YY_i) \right] dx_{1i} + \frac{1}{B} (XY_i - YX_i)\, dy_{1i} \right\} \\
\delta x_{2j} &= \Bigg[- \left(xy - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \right) - \frac{X}{B} \left(\frac{b}{2} c_8 - c_5 - c_9 \right) + \\
&+ \frac{Y}{B} \left(\frac{b}{2} c_1 - c_7 + c_8 \right) \Bigg] \frac{d\Delta\varkappa}{b} + \Bigg[\left(x^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) - b \left(x - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right) + \\
&+ \frac{X}{B} \left(bc_1 + \frac{b}{2} c_2 - c_4 - c_8 \right) + \frac{Y}{B} \left(\frac{b}{2} c_3 - c_6 + c_9 \right) \Bigg] \frac{dbz}{bZ} + \\
&+ \Bigg\{ \left(x^3 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \right) - 2b \left(x^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) + \\
&+ (b + Z^2) \left(x - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right) - \frac{X}{B} \Bigg[(b^2 + Z^2)\, c_1 + \frac{b^2 + 2Z^2}{2} c_2 - \\
&- 2bc_4 - \frac{3}{2} bc_8 + c_{10} + c_{14} \Bigg] - \frac{Y}{B} \left(\frac{b^2}{2} c_3 - 2bc_6 + \right. \\
&\left. + \frac{3b}{2} c_9 + c_{11} - c_{12} \right) \Bigg\} \frac{d\Delta\alpha}{bZ} + \Bigg[\left(x^2 y - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \right) - \\
&- b \left(xy - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \right) + \frac{X}{B} \left(\frac{b}{2} c_5 + bc_9 - c_{12} - c_{13} \right) + \\
&+ \frac{Y}{B} \left(\frac{b}{2} c_7 - bc_8 + c_{14} - c_{15} \right) \Bigg] \frac{d\Delta\omega}{bZ} \\
\delta x_{3j} &= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{B} (XX_i + YY_i) \right] dX_i + \frac{1}{B} (XY_i - YX_i)\, dY_i \right\} \\
\delta y_{1j} &= dy_{1j} - \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{B} (YY_i + XX_i) \right] dy_{1i} + \frac{1}{B} (YX_i - XY_i) dx_{1i} \right\} \\
\delta y_{2j} &= \Bigg[\frac{b}{2} \left(x - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right) - \left(y^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right) - \frac{Y}{B} \left(\frac{b}{2} c_3 - c_5 - c_9 \right) - \\
&- \frac{X}{B} \left(\frac{b}{2} c_1 - c_7 - c_8 \right) \Bigg] \frac{d\Delta\varkappa}{b} + \Bigg[\left(xy - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right) - \\
&- \frac{b}{2} \left(y - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \right) + \frac{Y}{B} \left(bc_1 + \frac{b}{2} c_2 - c_4 - c_8 \right) -
\end{aligned}
\right\} ; \quad (9)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&-\frac{X}{B}\left(\frac{b}{2}c_3-c_6+c_9\right)\Bigg]\frac{dbz}{bZ}+\Bigg\{\left(x^2y-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2y_i\right)-\\
&-\frac{3b}{2}\left(xy-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)+\left(\frac{b^2+Z^2}{2}\right)\left(y-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)-\\
&-\frac{Y}{B}\left[\left((b^2+Z^2)c_1+\frac{b^2+2Z^2}{2}c_2-2bc_4-\frac{3}{2}bc_8+c_{10}+c_{14}\right]+\right.\\
&+\frac{X}{B}\left(\frac{b^2}{2}c_3-2bc_6+\frac{3b}{2}c_9+c_{11}-c_{12}\right)\Bigg\}\frac{d\Delta\alpha}{bZ}+\\
&+\left[-\frac{b}{2}\left(y^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\right)+\left(xy^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i^2\right)+\right.\\
&\left.+\frac{Y}{B}\left(\frac{b}{2}c_5+bc_9-c_{12}-c_{13}\right)+\frac{X}{B}\left(\frac{b}{2}c_7-bc_8+c_{14}-c_{15}\right)\right]\frac{d\Delta\omega}{bZ}\\
&\delta y_{3j}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{B}(YX_i+XY_i)\right]dY_i+\frac{1}{B}(YY_i-XX_i)\,dX_i\right\}
\end{aligned}
\right\};(10)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\delta z_{1j}=dz_{1j}-\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{A}\left[X(c_2X_i-c_3Y_i)-Y(c_3X_i-c_1Y_i)\right]\right\}dz_{1j}\\
&\delta z_{2j}=\left[-\left(x^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)+\frac{X}{A}(c_2c_4-c_3c_6)+\right.\\
&\left.+\frac{Y}{A}(c_1c_6-c_3c_4)\right]\frac{d\Delta\alpha}{b}+\left[-\left(xy-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)+\right.\\
&\left.+\frac{X}{A}(c_2c_9-c_3c_8)+\frac{Y}{A}(c_1c_8-c_3c_9)\right]\frac{d\Delta\omega}{b}\\
&\delta z_{3j}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{A}\left[-X(c_2X_i+c_3Y_i)-Y(c_3X_i-c_1Y_i)\right]\right\}dZ_i
\end{aligned}
\right\}.(11)
$$

В формулах (9)—(11) приняты следующие обозначения:

$$
c_1=\sum_{i=1}^{n}X_i^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2,\quad c_2=\sum_{i=1}^{n}Y_i^2=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2,
$$

$$
c_3=\sum_{i=1}^{n}X_iY_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i,
$$

$$c_4=\sum_{i=1}^{n} x_i^3-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad c_5=\sum_{i=1}^{n} y_i^3-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2\sum_{i=1}^{n} y_i,$$

$$c_6=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\sum_{i=1}^{n} y_i, \quad c_7=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\sum_{i=1}^{n} y_i^2,$$

$$c_8=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\sum_{i=1}^{n} y_i, \quad c_9=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$c_{10}=\sum_{i=1}^{n} x_i^4-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^3\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad c_{11}=\sum_{i=1}^{n} x_i^3 y_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^3\sum_{i=1}^{n} y_i,$$

$$c_{12}=\sum_{i=1}^{n} x_i^3 y_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad c_{13}=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i^3-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i^2\sum_{i=1}^{n} y_i,$$

$$c_{14}=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i\sum_{i=1}^{n} y_i, \quad c_{15}=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i^2\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$A=\sum_{i=1}^{n} X_i^2\sum_{i=1}^{n} Y_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n} X_i Y_1\right)^2; \quad B=\sum_{i=1}^{n} X_i^2+\sum_{i=1}^{n} Y_i^2.$$

В уравнения (9)—(11) входят ошибки $d\Delta\varkappa$, dbz, $d\Delta\alpha$ и $d\Delta\omega$. При определении элементов взаимного ориентирования пары аэроснимков по измеренным параллаксам в шести стандартно расположенных точках из перечисленных ошибок корреляцию имеют только ошибки dbz и $d\Delta\alpha$ [2]. Для учета этого необходимо формулы (9)—(11) предварительно преобразовать, разложив в них ошибку $d\Delta\alpha$ на статистически независимые составляющие $d\alpha_2'$ и dbz, т. е. $d\Delta\alpha=d\alpha_2'+\frac{1}{b}dbz$ [1].

Полученные уравнения (8) являются общими и они могут быть использованы как для оценки точности положения любой точки внешне ориентированной модели, так и для уравнивания координат точек модели по способу наименьших квадратов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лобанов А. Н. [и др.]. Фототриангуляция с применением электронной цифровой вычислительной машины. М., «Недра», 1967.
2. Hallert B. Über die Genauigkeit der Luftphotogrammetrie. Stockholm, 1956.

Работа поступила в редколлегию 17 июня 1974 года. Рекомендована лабораторией аэрометодов Всесоюзного научно-производственного объединения «Аэрогеология» Мингео СССР.