

Л. Л. ПОЛЯКОВСКАЯ

РАЗЛОЖЕНИЕ РЕЛЬЕФА МАРСА
В РЯД ВЫБОРОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Выбор рабочей формулы для вычисления выборочных функций при разложении функции на сфере. Выборочную функцию [7] порядка N $Z_{kj}(\theta, \lambda)$, где $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ (φ и λ — соответствующие широта и долгота точки), можно представить линейной комбинацией сферических гармоник:

$$\bar{X}_{nm}(\theta, \lambda) = \sigma_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \cos m\lambda, \quad \bar{Y}_{nm}(\theta, \lambda) = \sigma_{nm} P_{nm}(\cos \theta) \sin m\lambda;$$

$$\sigma_{nm}^2 = \frac{2(2n+1)(n-m)!}{\varepsilon_m (n+m)!}, \quad \varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_m = 2 \text{ при } m > 0; \quad (1)$$

$$Z_{kj}(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n [A_{kj}^{nm} \bar{X}_{nm}(\theta, \lambda) + B_{kj}^{nm} \bar{Y}_{nm}(\theta, \lambda)],$$

причем в выборочных точках $P_{kj}(\theta_k, \lambda_{kj})$

$$Z_{kj}(\theta_i, \lambda_{ji}) = \delta_{kj, ji}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots, 2k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

где $\delta_{kj, ji}$ — символ Кронекера.

Для простоты выкладок от записи с удвоенными индексами перейдем к записи с одинарными и от элементов множества $\{\bar{X}_{nm}, \bar{Y}_{nm}\}$ — к элементам отвечающего ему множества

$\{\bar{X}_p\}$ и соответственно $\{\theta_k, \lambda_{kj}\} \rightarrow \{\theta_q, \lambda_q\}$ с учетом следующих соотношений [7]:

$$\begin{aligned} \bar{X}_{nm} &\rightarrow \bar{X}_p, \quad p = n^2 + 2m + 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n; \\ \bar{Y}_{nm} &\rightarrow \bar{X}_p, \quad p = n^2 + 2m, \quad m = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (3)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots, N$, $p = 1, 2, \dots, M = (N + 1)^2$;

$$\begin{aligned} (\theta_k, \lambda_{kj}) &\rightarrow (\theta_q, \lambda_q), \quad q = k^2 + j + 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, 2k, \\ k &= 0, 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (4)$$

Выборочные функции Z_{kj} теперь можно представить в виде

$$Z_q(\theta, \lambda) = \sum_{p=1}^M B_{qp} \bar{X}_p(\theta, \lambda); \quad (5)$$

$$Z_q(\theta_s, \lambda_s) = \delta_{q,s}, \quad s, q = 1, 2, \dots, M. \quad (6)$$

В работе [7] приведено два способа определения $Z_q(\theta, \lambda)$: 1) вычисление коэффициентов B_{qp} из уравнений (5) при условии (6); 2) определение $Z_q(\theta, \lambda)$ прямым обращением уравнений вида

$$\bar{X}_p(\theta, \lambda) = \sum_{q=1}^M \bar{X}_p(\theta_q, \lambda_q) Z_q(\theta, \lambda), \quad q = 1, 2, \dots, M. \quad (7)$$

При определении $Z_q(\theta, \lambda)$ по первому способу вычисляют так называемые промежуточные сферические гармоники, определенные в выборочных точках. Подробные формулы такого рода преобразования даны в главе 4.1 работы [7]. Ввод промежуточных гармоник позволяет избежать обращения основной матрицы задачи, хотя влечет за собой увеличение объема вычислений.

В матричной записи уравнениям (5) соответствует матрица

$$Z_{n,1} = B_{n,n} \cdot \Phi_{n,1}, \quad (8)$$

где $Z_{n,n} = \{Z_{q,s}\} = \{Z_q(\theta_s, \lambda_s)\} = E$;

$$A_{n,n} = \{\bar{X}_p, s\} = \{\bar{X}_p(\theta_s, \lambda_s)\}, \quad B_{n,n} = \{B_{qp}\};$$

$$\Phi_{n,1} = \{\bar{X}_p\} = \{\bar{X}_p(\theta, \lambda)\}, \quad B_{n,n} \cdot A_{n,n} = E_{n,n}. \quad (9)$$

Таким образом, $B_{n,n} = A_{n,n}^{-1}$ и, следовательно, коэффициенты A_{kj}^{nm} и B_{kj}^{nm} можно вычислить прямым обращением матрицы $A_{n,n}$.

Неизвестные коэффициенты B_{qp} из уравнения (5) следует определить непосредственно из решения $M = (N + 1)^2$ систем уравнений [8]. Например, чтобы найти $Z_3(\theta, \lambda)$ для неизвест-

при условии

$$\sum_{i=1}^n d_i \omega_{ij} = f_j, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Применяя результаты указанной статьи к рассматриваемой здесь задаче, имеем при $k=n$ [1]

$$D_{n,1} = A_{n,n}^{-1} \cdot F_{n,1},$$

где $A_{n,n} = (\omega_{ji})_{n,n}$ — транспонированная матрица основной матрицы смешанной задачи (здесь ω_{ji} — значение i -й функции системы $\{\omega_i\}$ в j -м узле); $F_{n,1}$ — матрица-столбец заданных значений функции f в узлах. Тогда

$$f^{(n)} = \Phi_{1,n} \cdot D_{n,1} = \Phi_{1,n} \cdot A_{n,n}^{-1} \cdot F_{n,1}, \quad (14)$$

где $\Phi_{1,n}$ — матрица-строка первых используемых функций системы $\{\omega_i\}$.

В статье [1] показано, что

$$Z_{1,n} = \Phi_{1,n} \cdot A_{n,n}^{-1} \quad (15)$$

представляет собой матрицу-строку выборочных функций.

В развернутом виде

$$Z_{1,n} = |\bar{X}_1(\theta, \lambda) \bar{X}_2(\theta, \lambda) \dots \bar{X}_M(\theta, \lambda)| \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \bar{X}_1(\theta_1, \lambda_1) \bar{X}_2(\theta_1, \lambda_1) \dots \bar{X}_M(\theta_1, \lambda_1) \\ \bar{X}_1(\theta_2, \lambda_2) \bar{X}_2(\theta_2, \lambda_2) \dots \bar{X}_M(\theta_2, \lambda_2) \\ \vdots \\ \bar{X}_1(\theta_M, \lambda_M) \bar{X}_2(\theta_M, \lambda_M) \dots \bar{X}_M(\theta_M, \lambda_M) \end{vmatrix}.$$

Как видим, формулы (13) и (15) идентичны. Это подтверждает связь с теорией смешанной задачи приближения функций и показывает возможность практического применения формулы (15). Вычисление выборочных функций по формуле (15) требует меньшего объема вычислений, чем способ, предложенный в работе [7], так как позволяет миновать вычисление значений промежуточных сферических гармоник. Поэтому при вычислении выборочных функций при разложении рельефа Марса будем далее использовать формулу (15).

Разложение рельефа Марса в ряд выборочных функций до пятого порядка. Учитывая, что элементарные сферические функции $\{\omega_i\} = \{\bar{X}_p\}$ образуют на сфере полную и ортонормированную систему функций, при разложении рельефа Марса в ряд выборочных функций воспользуемся в качестве рабочей формулой (14) разложения $f \in L^2_\tau$.

$$f^{(M)} = H^{(M)}(\theta, \lambda) = \Phi_{1,n} \cdot A_{n,n}^{-1} \cdot H_{n,1} = Z_{1,n} \cdot H_{n,1}. \quad (16)$$

Здесь $A_{n,n} = \{ \bar{X}_p(\theta_s, \lambda_s) \}$, $p, s = 1, 2, \dots, M = (N + 1)^2$;

$$\Phi_{1,n} = | \bar{X}_1(\theta, \lambda) \bar{X}_2(\theta, \lambda) \dots \bar{X}_M(\theta, \lambda) |; \quad H_{n,1} = \begin{vmatrix} H_1(\theta_1, \lambda_1) \\ H_2(\theta_2, \lambda_2) \\ \dots \\ H_M(\theta_M, \lambda_M) \end{vmatrix},$$

где N — порядок разложения искомой величины в ряд выборочных функций. Формула (16) тождественна формуле

$$H^{(M)}(\theta, \lambda) = \sum_{q=1}^M H(\theta_q, \lambda_q) Z_q(\theta, \lambda), \quad (17)$$

и вычисление разложения рельефа Марса можно осуществить по формуле (16).

Таблица 1

Значения выборочных функций $Z(\varphi_{-90^\circ}, \lambda_{350^\circ})$ для $N=5$

Номер функции	Z	Номер функции	Z	Номер функции	Z
1	-0,090901776	13	-0,05906338	25	-0,0098598365
2	0,42585373	14	-0,053902315	26	0,054556416
3	0,42585708	15	-0,086670003	27	0,0084171685
4	0,42585352	16	-0,027620112	28	0,019963912
5	0,037895117	17	-0,040716857	29	0,038483490
6	0,037895821	18	-0,0098622384	30	0,018661330
7	0,37988029	19	-0,032357984	31	0,026010813
8	0,037892051	20	-0,020930872	32	0,026005853
9	0,037897991	21	-0,024548471	33	0,018661318
10	-0,10124947	22	-0,024543045	34	0,038485056
11	-0,027639856	23	-0,020931915	35	0,019964054
12	-0,086608374	24	-0,03260216	36	0,0084159256

В качестве численного примера для апробирования предложенной нами методики мы получили разложение по формуле (16) до пятого порядка включительно.

Основой для разложения рельефа Марса в ряд выборочных функций послужили следующие исходные данные:

1. Каталог *Davies* превышений Марса над референц-сфероидом (экваториальный радиус $a=3393,4$ км, полярный $b=3375,8$ км) через 10° по широте и долготе, линейно-интерполированных по превышениям, полученным в 1972 г. по радиозатемнениям точек [6].

2. Топографические высоты Марса, осредненные по выборочным точкам с координатами θ, λ , выбранными равномерно на сфере:

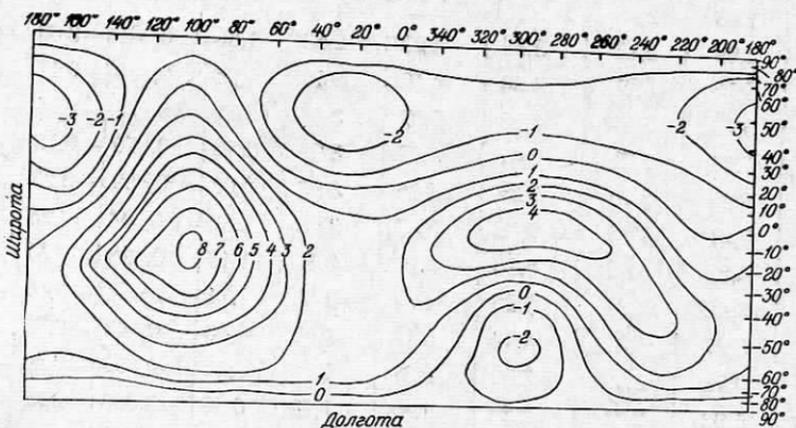
Топографические высоты Марса, полученные из разложения

λ°	φ°								
	90	80	70	60	50	40	30	20	10
0	0	-0,22	-0,97	-1,76	-2,13	-1,84	-1,00	0,03	0,91
10	0	-0,25	-1,07	-1,95	-2,35	-2,01	-1,09	-0,02	0,78
20	0	-0,26	-1,14	-2,10	-2,54	-2,16	-1,14	0,04	0,86
30	0	-0,26	-1,16	-2,11	-2,64	-2,26	-1,17	0,10	1,02
40	0	-0,25	-1,11	-2,08	-2,57	-2,21	-1,12	0,22	1,26
50	0	-0,22	-0,97	-1,83	-2,24	-1,89	-0,82	0,54	1,70
60	0	-0,18	-0,78	-1,41	-1,64	-1,19	-0,12	1,24	2,48
70	0	-0,14	-0,54	-0,87	-0,78	-0,13	1,01	2,38	3,65
80	0	-0,10	-0,30	-0,29	0,16	1,11	2,39	3,78	5,05
90	0	-0,07	-0,11	0,19	0,99	2,21	3,64	5,05	6,27
100	0	-0,06	-0,01	0,46	1,46	2,84	4,33	5,71	6,88
110	0	-0,08	-0,03	0,45	1,44	2,76	4,18	5,47	6,57
120	0	-0,13	-0,18	0,13	0,88	1,96	3,16	4,32	5,38
130	0	-0,19	-0,42	-0,42	-0,06	0,63	1,55	2,59	3,67
140	0	-0,26	-0,71	-1,09	-1,17	-0,88	-0,20	0,79	1,95
150	0	-0,34	-1,02	-1,74	-2,20	-2,18	-1,63	-0,62	0,63
160	0	-0,41	-1,28	-2,25	-2,93	-3,04	-2,48	-1,41	-0,11
170	0	-0,47	-1,46	-2,56	-3,29	-3,35	-2,71	-1,61	-0,39
180	0	-0,51	-1,55	-2,65	-3,30	-3,21	-2,49	-1,44	-0,44
190	0	-0,52	-1,56	-2,57	-3,05	-2,81	-2,05	-1,15	-0,43
200	0	-0,52	-1,50	-2,37	-2,68	-2,32	-1,58	-0,86	-0,39
210	0	-0,49	-1,39	-1,13	-2,30	-1,88	-1,18	-0,57	-0,22
220	0	-0,45	-1,26	-1,89	-2,00	-1,55	-0,85	-0,22	0,21
230	0	-0,40	-1,12	-1,70	-1,79	-1,33	-0,55	0,25	0,94
240	0	-0,35	-1,00	-1,56	-1,67	-1,20	-0,27	0,82	1,84
250	0	-0,29	-0,89	-1,46	-1,60	-1,10	-0,03	1,40	2,72
260	0	-0,24	-0,80	-1,38	-1,56	-1,02	0,25	1,91	3,42
270	0	-0,20	-0,72	-1,31	-1,50	-0,93	0,47	2,29	3,87
280	0	-0,16	-0,65	-1,24	-1,44	-0,83	0,65	2,55	4,12
290	0	-0,13	-0,60	-1,17	-1,37	-0,74	0,76	2,68	4,22
300	0	-0,11	-0,57	-1,13	-1,32	-0,71	0,77	2,65	4,17
310	0	-0,11	-0,56	-1,12	-1,32	-0,76	0,62	2,42	3,94
320	0	-0,11	-0,59	-1,16	-1,38	-0,91	0,32	1,97	3,45
330	0	-0,13	-0,65	-1,24	-1,51	-1,14	-0,09	1,37	2,75
340	0	-0,16	-0,74	-1,38	-1,69	-1,39	-0,49	0,75	1,98
350	0	-0,19	-0,85	-1,56	-1,90	-1,63	-0,82	0,28	1,31

φ°									
0	-10	-20	-30	-40	-50	-60	-70	-80	-90
1, 46	1,71	1,81	1,84	1,77	1,48	0,93	0, 24	-0,35	-0,57
1, 16	1,24	1,28	1,42	1,59	1,55	1,15	0, 44	-0,26	-0,57
1, 15	1,07	0,99	1,13	1,41	1,55	1,27	0, 58	-0,19	-0,57
1, 34	1,23	1,06	1,14	1,42	1,60	1,36	0, 68	-0,14	-0,57
1, 72	1,70	1,55	1,55	1,71	1,78	1,47	0, 74	-0,10	-0,57
2, 35	2,53	2,46	2,39	2,33	2,14	1,61	0, 78	-0,09	-0,57
3, 31	3,69	3,73	3,55	3,20	2,63	1,80	0, 81	-0,09	-0,57
4, 60	5,13	5,21	4,88	4,19	3,17	1,98	0, 81	-0,11	-0,57
6, 03	6,59	6,64	6,13	5,07	3,64	2,11	0, 77	-0,14	-0,57
7, 21	7,74	7,71	7,01	5,68	3,92	2,13	0, 70	-0,18	-0,57
7, 75	8,23	8,15	7,35	5,85	3,93	2,03	0, 59	-0,23	-0,57
7, 42	7,91	7,85	7,06	5,57	3,65	1,80	0, 44	-0,28	-0,57
6, 28	6,86	6,92	6,26	4,90	3,16	1,48	0, 28	-0,33	-0,57
4, 68	5,42	5,64	5,26	4,04	2,55	1,14	0, 14	-0,36	-0,57
3, 10	3,97	4,32	4,02	3,14	1,95	0,83	0, 03	-0,39	-0,57
1, 86	2,78	3,19	3,02	2,37	1,48	0,62	-0, 02	-0,40	-0,57
1, 08	1,93	2,31	2,23	1,82	1,20	0,55	-0,005	-0,39	-0,57
0, 63	1,31	1,64	1,69	1,52	1,16	0,64	0, 09	-0,37	-0,57
0, 31	0,80	1,13	1,37	1,47	1,32	0,87	0, 23	-0,34	-0,57
0, 03	0,39	0,80	1,29	1,67	1,67	1,19	0, 40	-0,31	-0,57
0, 13	0,20	0,77	1,51	2,08	2,12	1,53	0, 56	-0,29	-0,57
0,009	0,41	1,13	2,01	2,62	2,57	1,80	0, 66	-0,29	-0,57
0, 57	1,10	1,88	2,70	3,14	2,88	1,92	0, 67	-0,31	-0,57
1, 52	2,14	2,80	3,33	3,43	2,89	1,81	0, 56	-0,35	-0,57
2, 64	3,22	3,57	3,62	3,28	2,52	1,43	0, 33	-0,42	-0,57
3, 64	4,01	3,89	3,34	2,62	1,73	0,81	0,004	-0,51	-0,57
4, 30	4,34	3,66	2,60	1,52	0,65	0,03	-0, 38	-0,61	-0,57
4, 61	4,25	3,04	1,51	0,23	-0,52	-0,77	-0, 76	-0,70	-0,57
4, 68	3,98	2,35	0,49	-0,90	-1,50	-1,43	-1, 07	-0,77	-0,57
4, 66	3,77	1,93	0,11	-1,56	-2,08	-1,83	-1, 26	-0,81	-0,57
4, 63	3,76	1,93	-0,11	-1,60	-2,14	-1,89	-1, 31	-0,82	-0,57
4, 51	3,86	2,27	0,40	-1,06	-1,72	-1,64	-1, 20	-0,79	-0,57
4, 18	3,88	2,70	1,16	-0,19	-0,96	-1,14	-0, 97	-0,73	-0,57
0, 60	3,64	2,95	1,84	0,72	-0,10	-0,53	-0, 66	-0,65	-0,57
3, 82	3,10	2,84	2,20	1,41	0,67	0,07	-0, 33	-0,55	-0,57
2, 04	2,39	2,40	2,17	1,75	1,20	0,58	-0, 02	-0,44	-0,57

$$\left. \begin{aligned} \theta_{2k} &= \frac{2\pi}{2N+1} k, & k &= 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{N}{2} \right]; \\ \theta_{2k+1} &= \frac{2\pi}{2N+1} (N-k), & k &= 0, 1, 2, \dots, \left[\frac{N-1}{2} \right]; \\ \lambda_{kj} &= \frac{2\pi}{2k+1} j, & k &= 0, 1, 2, \dots, N; \\ & & j &= 0, 1, 2, \dots, 2k. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

3. Значения функций Лежандра первых пяти порядков в выборочных точках и узлах картографической сетки, построенной через 10° по широте и долготе.



Карта высот рельефа Марса, построенная относительно референц-сфероида. (Сечение рельефа 1 км).

Вычисления производили на языке Алгол-60 на ЭВМ-222 в трансляторе ТА-1М.

В результате вычислений были получены значения выборочных функций Z_1, Z_2, \dots, Z_{36} (табл. 1), коэффициенты B_{qr} и топографические высоты Марса (табл. 2) в узлах картографической сетки, построенной через 10° по широте и долготе. По этим высотам составлена карта высот рельефа Марса (рис. 1) относительно референц-сфероида. Изолинии высот проведены через 1 км.

По характеру изолиний карта близка к карте топографических высот 6,1 мб ареоида [5], составленной до восьмого порядка по совокупности данных радиозатемнений, радарных, инфракрасных, ультрафиолетовых и фотограмметрических с ошибками определения высот до двух км.

Действительно, на нашей карте ярко выражен район *Tharsis** ($101 \dots 125^\circ W, 12^\circ S - 16^\circ N$), соответствующий цепи наибольших топографических возвышенностей; он доминирует, до-

* Здесь и далее регионы топографических структур Марса даны в соответствии с Новой номенклатурой, принятой МАС для Марса [4].

стигая высоты 8 км. На карте хорошо заметно простирающееся к востоку от *Tharsis* топографическое понижение *Vallis Simud* ($37...40^{\circ}W$, $0...14^{\circ}N$). К северу это понижение простирается до бассейна *Acidalia Planitia* ($30^{\circ}W$, $48^{\circ}N$).

На карте четко виден бассейн *Hellas* ($250^{\circ}W$, $50^{\circ}S$) и широкое плато в районе экватора от $250...320^{\circ}W$. Наиболее низкий участок карты соответствует области, расположенной северо-западнее *Olympus Mons* ($133^{\circ}W$, $18^{\circ}N$). Амплитуда изменения высот на Марсе на нашей карте достигает 12 км, на карте из работы [5] — 13 км.

Составленная карта по степени детальности и по характеру изолиний близка к гипсометрической карте масштаба 1:16000000 с сечением рельефа через 1 км, построенной В. Б. Нейманом по 1205 амплитудам, полученным в результате обработки стереоснимков *Mariner-9 Kliore et al* [3]. При этом В. Б. Нейман строил свою карту также относительно референц-сфероида ($a=3393,4$ км; $b=3375,8$ км) по каталогу *Davies*. Естественно, что эти карты очень схожи. Это подтверждает правильность методики вычисления выборочных функций и преимущество их практического использования.

Список литературы: 1. *Короткова Л. Л.* Выборочные функции и их использование в геодезии и селенодезии. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 29. 2. *Мещеряков Г. А.* Про одну змішану задачу теорії наближення функцій. — Доп. АН УРСР, 1974, № 12. 3. *Нейман В. Б.* Гипсометрический анализ рельефа Марса по данным «Маринер-9». — Астрономический вестник, 1975, т. 9, № 4. 4. *Шингарева К. Б.* Номенклатура марсианских образований. — Космические исследования, 1977, т. 15, вып. 6. 5. *Christensen E. J.* *Martia Topography Derived From Occultation, Radar, Spectral and Optical Measurements.* — *Journal of Geophysical Research*, July 10, 1975, vol. 80, No 20. 6. *Davies M. E., Arthur D. W. J.* *Martian Surface Coordinates.* — *Journal of Geophysical Research*, July 10, 1973, vol. 78, No 20. 7. *Lundquist C. A., Giacaglia G. E. O.* *Sampling functions for geophysics.* — *SAO Spec. Rep.*, 1972, No 344. 8. *Schmidt H. F.* *Trigonometrische Interpolation Mittels — Sampling Functions.* — *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 1974; Heft 3.

Работа поступила в редколлегия 10 января 1979 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.