

О ПОДЕРЕ ЛИНЕЙНО-УГЛОВОЙ ЗАСЕЧКИ

Решение вопросов уравнивания и оценки точности линейно-угловых засечек основано на графическом определении данных для построения подеры среднего квадратического эллипса погрешностей и для уравнивания.

Пусть для определения координат точки P измерены расстояния $S_1, S_2, \dots, S_n$ и дирекционные углы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ сторон засечки, координаты исходных пунктов — $T_1, T_2, \dots, T_n$ — известны (рис. 1). По результатам измерений можно вычислить координаты точки P

$$x_i = x_{T_i} + \Delta x_i; \quad y_i = y_{T_i} + \Delta y_i; \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Вероятнейшие координаты определяемого пункта:

$$\begin{aligned} x_P &= \frac{x_1 p_{x_1} + x_2 p_{x_2} + \dots + x_n p_{x_n}}{p_{x_1} + p_{x_2} + \dots + p_{x_n}} = \frac{[x p_x]}{[p_x]}; \\ y_P &= \frac{y_1 p_{y_1} + y_2 p_{y_2} + \dots + y_n p_{y_n}}{p_{y_1} + p_{y_2} + \dots + p_{y_n}} = \frac{[y p_y]}{[p_y]}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь p_{x_i} и p_{y_i} — веса координат соответствующих сторон засечки

$$p_{x_i} = \frac{c^2}{m_{x_i}^2}, \quad p_{y_i} = \frac{c^2}{m_{y_i}^2}, \quad (2)$$

где c — величина постоянная; m_{x_i} и m_{y_i} — средние квадратические погрешности координат точки P относительно исходных пунктов.

Для определения погрешностей координат точки P воспользуемся дифференциальными формулами

$$dx = \Delta x_i d' s - \Delta y_i d' \alpha; \quad dy = \Delta y_i d' s + \Delta x_i d' \alpha \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

причем $d' s = \frac{ds_i}{s_i}; \quad d' \alpha = \frac{d\alpha_i}{\rho}.$

В соответствии с этим имеем для отдельной стороны засечки:

$$m_{x_i}^2 = \Delta x_i^2 m_s^2 + \Delta y_i^2 m_\alpha^2; \quad m_{y_i}^2 = \Delta y_i^2 m_s^2 + \Delta x_i^2 m_\alpha^2; \\ M_i^2 = m_{x_i}^2 + m_{y_i}^2 = S_i^2 (m_s^2 + m_\alpha^2), \quad (4)$$

где m_s и m_α — средние квадратические погрешности соответственно измерения расстояний и дирекционных углов (в относительной мере и в радианах).

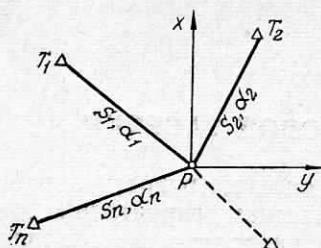


Рис. 1. Схема линейно-угловой засечки.

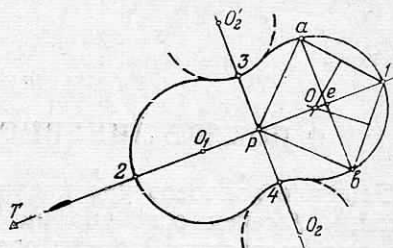


Рис. 2. Построение подеры отдельной стороны засечки.

Таким образом, веса координат отдельных сторон засечки подсчитывают по формулам (2) с учетом выражений (4). Найденные по формулам (1) значения x_P и y_P позволяют определить поправки v_{x_i} и v_{y_i} , по которым вычисляют средние квадратические погрешности урешенных координат точки P :

$$m_{x_P} = \sqrt{\frac{[v_{x_i} v_{x_i} p_{x_i}]}{[p_{x_i}] (n-1)}}; \quad m_{y_P} = \sqrt{\frac{[v_{y_i} v_{y_i} p_{y_i}]}{[p_{y_i}] (n-1)}}. \quad (5)$$

Аналитическое решение задачи с использованием формул (5) лишено наглядности и сводится к определению средних квадратических погрешностей лишь по координатным осям. Этого бывает недостаточно для правильной характеристики, например, погрешности взаимного положения соседних точек или погрешности точки по какому-либо направлению. Кроме того, по величинам m_{x_P} и m_{y_P} , строго говоря, нельзя судить окончательно о качестве засечки. Так, равенство этих величин вовсе не означает, что сдвиг точки относительно ее истинного положения в различных направлениях одинаков.

В работе [1] показаны преимущества использования подеры для оценки точности положения определяемой точки. Для

построения подеры необходимо знать A_0 , B_0 и φ_0 — большую и малую полуоси и дирекционный угол большой оси. Рассмотрим методику определения элементов подеры отдельной стороны засечки, построение и использование подер для уравнивания и оценки точности линейно-угловой засечки.

Возьмем отдельную сторону засечки (рис. 2). При $m_s > m_\alpha$ направление большой оси подеры совпадает с направлением этой стороны, т. е. $\varphi_0 = \alpha$; $A_0 = S \cdot m_s$; $B_0 = S \cdot m_\alpha$. Подеру отдельного направления засечки строим следующим образом [2]. Откладываем в некотором масштабе от точки P по направлению стороны засечки отрезки $P-1 = P-2 = A_0$, а по перпендикулярному направлению — отрезки $P-3 = P-4 = B_0$. В точке e восстанавливаем перпендикуляр ab к большой полуоси подеры, причем $Pe = ea = ev = M : 2$, где $M^2 = A_0^2 + B_0^2$. Для определения M достаточно измерить расстояние между точками, например, 3 и 1. По точкам a , 1 и b находим центр окружности O , а также симметричный ему O_1 . Проведя окружности радиусом $O-1 = O_1-2$, подбираем на продолжении малой оси подеры центры O_2' и O_1 и проводим окружности, касательные первым двум [5]. Как видим, построение подеры проще по сравнению с построением эллипса и заключается в основном в отыскании положения центра окружности O .

Этот центр можно найти иным путем. С учетом того, что $Pa = M/\sqrt{2}$, нетрудно вычислить отрезок

$$PO = \frac{2A_0^2 - M^2}{2(2A_0 - M)} = \frac{A_0^2 - B_0^2}{2(2A_0 - M)}, \quad (6)$$

отложив который вдоль большой оси от точки P , получим точку O .

Покажем на примере использование подер для целей уравнивания линейно-угловой засечки. Предположим, что для определения координат точки P (рис. 3) были измерены со средней относительной погрешностью 1 : 40 000 расстояния S_1 , S_2 и S_3 (таблица), а средняя квадратическая погрешность измерения дирекционных углов направлений засечки составила $\pm 2''$. В соответствии с этим элементы подер отдельных сторон будут: $A_0 = \pm 11,25$ см; $B_0 = \pm 4,36$ см; $A_0 = \pm 10,00$ см; $B_0 = \pm 3,88$ см; $A_0 = \pm 6,75$ см и $B_0 = \pm 2,62$ см. По этим данным, пользуясь приведенной методикой, строим подеры для каждой стороны (рис. 3). Теперь простыми измерениями вдоль координатных осей определяем $m_{x_1} = \pm 6,00$ см; $m_{x_2} = \pm 6,75$ см; $m_{x_3} = \pm 5,50$ см; $m_{y_1} = \pm 4,00$ см; $m_{y_2} = \pm 8,50$ см и $m_{y_3} = \pm 10,75$ см. По формулам (2) вычисляем веса и по формулам (1) вероятнейшие значения координат вставляемой точки P .

Элементы результирующей подеры, характеризующей погрешность положения точки P после уравнивания, можно посчитать по известным формулам с использованием, например, найденных значений m_{x_i} и m_{y_i} или получить графоаналитиче-

ским путем. Остановимся подробно на втором способе, который имеет ряд существенных преимуществ перед аналитическими.

В работе [3] приведена общая теория построения квадратического полигона с последующим использованием его периметра Π и замыкающей q_3^2 для определения A_0 , B_0 и φ_0 подеры многократной азимутальной засечки по формулам:

$$k = \frac{A_0^2}{B_0^2} = \frac{\Pi + q_3^2}{\Pi - q_3^2}; \quad M^2 = \frac{4 \cdot \mu^2 \cdot \Pi}{(\Pi + g_3^2)(\Pi - g_3^2)}; \quad B_0^2 = \frac{M^2}{1 + k}; \quad A_0^2 = k B_0^2, \quad (7)$$

где μ — ошибка единицы веса, которую находят из результатов уравнивания или задают при предвычислениях.

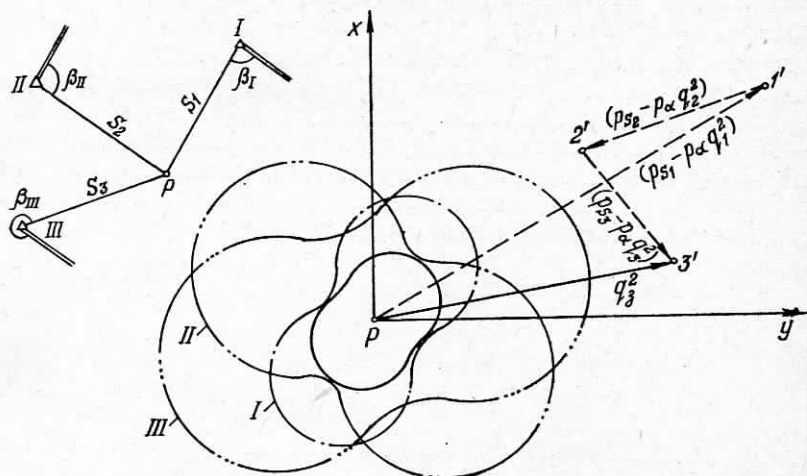


Рис. 3. Определение весов и построение результирующей подеры.

Принцип построения квадратического полигона и формулы (7) можно использовать при оценке точности любой засечки, в том числе и линейно-угловой. Действительно, согласно работе [4], дирекционный угол большой оси подеры этой засечки

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{[(p_s - p_\alpha q^2) \sin 2\alpha]}{[(p_s - p_\alpha q^2) \cos 2\alpha]}, \quad (8)$$

где p_{s_i} и p_{α_i} — веса измеренных длин и дирекционных углов сторон засечки; $q_i = \rho''/S_i$ — градиент направления.

Из формулы (8) вытекает, что достаточно сложить геометрически на плоскости двойного угла векторы $(p_s - p_\alpha q^2)_i$, найти Π и q_3^2 такого полигона, по которым, используя формулы (7), нетрудно вычислить элементы подеры. Причем этот способ дает строгое решение задачи. Покажем это на примере (рис. 3, таблица).

По формулам

$$p_{s_i} = \frac{\mu^2}{m_{s_i}^2}; \quad p_a = \frac{\mu^2}{m_a^2},$$

вычисляем веса измеренных расстояний и дирекционных углов, приняв $\mu^2 = m_{s_i}^2 = 45,56 \text{ см}^2$. Находим произведения $p_a q_i^2$ и разности $(p_s - p_a q_i^2)_i$, сложив которые определяем периметр Π квадратического полигона. Строим этот полигон в выбранном масштабе следующим образом. Последовательно откладываем от точки P под углом $2\alpha_1$ величину $(p_s - p_a q_1^2)$, от полученной точки $1'$ под углом $2\alpha_2$ величину $(p_s - p_a q_2^2)$ и, наконец, от

Параметры квадратического полигона

Направление	α_i , град	$2\alpha_i$, град	s_i , м	p_{s_i}	p_a , см ² /см ²	q_i , с/см	q_i^2 , с ² /см ²	$p_a q_i^2$	$(p_s - p_a q_i^2)$
I	30	60	2700	1,00	11,39	0,76	0,623	7,15	-6,15
II	306	252	4000	0,46	11,39	0,52	0,270	3,08	-2,62
III	251	142	4500	0,36	11,39	0,46	0,212	2,41	-2,05

$$\Pi = -10,82$$

точки $2'$ под углом $2\alpha_3$ величину $(p_s - p_a q_3^2)$. Знак минус периметра Π означает, что замыкающая q_3^2 полигона направлена от точки P к точке $3'$, а не наоборот. Этот знак зависит от соотношения весов угловых и линейных измерений.

Измеряем дирекционный угол замыкающей $2\varphi_0 = 79^\circ$, $\varphi_0 = 39^\circ 30'$ и ее длину в масштабе построений $q_3^2 = 4,22$ (величина безразмерная). По формулам (7) вычисляем $k = 2,28$: $M^2 = 19,86 \text{ см}^2$; $B_0 = \pm 2,46 \text{ см}$ и $A_0 = \pm 3,72 \text{ см}$. По A_0 , B_0 и φ_0 строим результирующую подеру по изложенной выше методике.

В работах [1, 2] отмечено, что результирующая подера располагается внутри фигуры, площадь которой является общей для подер простых засечек, что и иллюстрирует рис. 3.

Всякую линейно-угловую засечку можно рассматривать как совокупность линейной засечки и в нашем случае азимутальной. Поэтому квадратический полигон можно построить иначе. Вначале сложить геометрически p_{s_i} под углами $(2\alpha_i + 180^\circ)$, так как ориентировка подер линейной и азимутальной засечек различается на 90° . Продолжить построение полигона, складывая геометрически под углами $2\alpha_i$ величины $p_a q_i^2$. Замыкающая такого полигона будет иметь то же направление и величину, что и на рис. 3. Периметр Π в данном случае вычисляется как разность

$$\Pi = \sum_1^n p_{s_i} - \sum_1^n p_a q_i^2.$$

Предлагаемую методику оценки точности можно применять к засечкам с любой комбинацией угловых и линейных изме-

рений (равноточных или неравноточных). Для этого следует сложить геометрически на плоскости двойного угла ($2\alpha_i + 180^\circ$) и $2\alpha_i$ соответственно все p_{s_i} ($i=1, 2, \dots, n$), а затем все $p_{\alpha}q_j^2$ ($j=1, 2, \dots, t$), найти замыкающую, ее дирекционный угол $2\varphi_0$ и вычислить периметр

$$P = \sum_1^n p_{s_i} - \sum_1^t p_{\alpha} q_j^2,$$

а далее по формулам (7) рассчитать элементы подеры. Данные для уравнивания такой засечки получим, построив подеры простых азимутальных или линейно-угловых засечек. В статье не рассмотрена линейно-угловая засечка, когда при определяемой точке измеряются горизонтальные углы. Предлагаемую методику можно использовать и в этом случае с той лишь разницей, что вместо градиентов направлений необходимо оперировать градиентами горизонтальных углов.

В заключение отметим, что по предлагаемой методике решают задачу оптимизации вставки пункта. Так, для трансформации подеры в окружность необходимо, чтобы $q_3^2 = 0$. Если, например, к схеме засечки (рис. 3) есть возможность добавить измерение дополнительной стороны с $\alpha_4 = (2\varphi_0 + 180^\circ) : 2 = 129^\circ 30'$, у которой $(p_{s_4} - p_{\alpha}q_4^2) = q_3^2$, то $A_0 = B_0 = M/\sqrt{2}$.

Предлагаемая методика оценки точности линейно-угловых засечек проста в исполнении, отличается наглядностью и полнотой информации о погрешности положения определяемого пункта и по точности не уступает аналитическим способам расчета.

Список литературы: 1. *Шеховцов Г. А.* Графический способ оценки точности азимутальной засечки. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1972, вып. 4. 2. *Шеховцов Г. А.* Построение подеры прямой угловой засечки. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1978, вып. 27. 3. *Шеховцов Г. А.* О сравнении вариантов и выборе оптимального при азимутальной засечке. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1979, вып. 29. 4. *Tarczy-Hornoch A.* Über die Ausgleichung des Punkteinschnittes mit strecken und orientierten Richtungen nach der Methode der direkten Beobachtungen und über die Bestimmung der mittleren Fehlerellipse des Neupunktes. — Acta geod. geophys. et montanist. Acad. sci. hung., 1973(74), 8, № 1; 2. 5. *Veress S. A.* Measures of accuracy for analysis and design of survey. — Surv. and Mapp., 1973, 33, № 4.

Работа поступила в редколлегия 17 октября 1978 года. Рекомендована кафедрой инженерной геодезии Горьковского инженерно-строительного института.