чечной модели (см. таблицу) можно считать, что она хорошо описывает главную часть геопотенциала, соответствующую низшим членам его разложения (до третьего порядка включительно), т. е. достаточно полно представляет его глобальные особенности. Эта модель может служить основой для построения детальной многоточечной модели (типа (18)), однородно представляющей гравитационный потенциал вне Земли и на ее физической поверхности.

Список литературы: 1. *Бровар В. В., Юзефович А. П.* Параметры лунных масконов. — В сб.: Современные проблемы позиционной астрономии. XIX астрономическая конференция СССР, 1972. М., 1975. 2. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., Иностранная л-ра, 1952. 3. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Уравнения в частных производных математической физики. М., Высшая школа, 1970. 4. *Марченко А. Н.* О вычислении моментов гравитационных мультиполей Земли. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1977, вып. 25. 5. *Мещеряков Г. А.* О мультипольном представлении гравитационного потенциала. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1974, вып. 19. 6. *Мещеряков Г. А., Марченко А. Н.* Нахождение осей гравитационных мультиполей Земли. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1977, вып. 25. 7. *Мещеряков Г. А., Дейнека Ю. П.* Внешнее гравитационное поле Земли и ее трехмерные модели. Материалы XI Конгресса КБГА. Киев, Наукова думка, 1977. 8. *Мельхиор П.* Физика и динамика планет, т. 1. М., Мир, 1975. 9. *Ananda M.* Farside lunar gravity from a mass point model, Proc. Lunar Sci. Conf. 6th (1975), V. 3. 10. *Balmino G.* Representation of the Earth Potential by Buried Masses. — Use Artif. Satell. Geod. Washington, D. C. 1972. 11. *Dobaczewska W.* Okresleme potencialu sily cieżkosci Ziemi metoda mas punktowych. — Geodezja i kartografia, 1974. 12. *Hardy R. L.* Research Results in the Application of Multiquadric Equations to Surveying and Mapping Problems. — Surveying and Mapping, 1975, V. 35, N 4. 13. *Hardy R. L., Göpfert W. M.* Least squares prediction of the gravity anomalies, geoidal undulation, and deflections of the vertical with multiquadric harmonic functions. — Geoph. research letters, 1975, V. 2, N 10. 14. *Levie S. L. Jz.* Simple mass distribution for the Lunar potential. — The Moon, 1971, V. 3, N 3. 15. *Maxwell G. I.* A treatise on Electricity and Magnetism, V. 1.2 nd edition, Oxford, 1881. 16. Smithonian Standart Earth (III) Smiths. — Astroph. Observat. special report, 1973, N 353.

Работа поступила в редколлегию 4 января 1978 года. Рекомендована кафедрой теории математической обработки геодезических измерений Львовского политехнического института.

УДК 528.21/22

И. Ф. МОНИН, д-р техн. наук
Львовский политехнический институт

К ВОПРОСУ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ РЕГУЛЯРИЗИРОВАННОЙ ЗЕМЛИ

Внешнее гравитационное поле Земли вполне характеризуется потенциалом силы тяжести или его производными. Введя в рассмотрение замкнутую уровенную поверхность, близкую к геоиду (поверхность относимости), можно получить аномалии силы тяжести, высоты геоида относительно этой поверхности, уклонения отвеса и другие величины, при помощи которых также можно характеризовать гравитационное поле Земли. Эти величины, называемые элементами гравитационного поля Земли, определенным образом связаны друг с другом. Известны математические зависимости между элементами гравитационного поля Земли, найденные Д. Стоксом, Ф. Венинг Мейнесом, М. С. Молоденским, В. А. Магницким и др. [2].

В статье [3] выведены формулы, определяющие некоторые элементы гравитационного поля регуляризированной Земли. В качестве поверхности относимости принимали неуровенную сферу. Нормальное гравитационное поле Земли при этом не использовали. В связи с тем, что земная сфера довольно грубое приближение фигуры Земли, возникли [1] сомнения относительно пригодности полученных формул для практического применения. Поэтому в работе [4] было показано, как применять нормальное поле Земли, чтобы формулы, полученные в статье [3], имели практическое значение, поскольку при практическом применении этих формул обязательно придется использовать нормальное поле (во избежание операций с большими величинами).

Исследования [4] касались в основном формулы, обратной по своему смыслу формуле Стокса. Другие соотношения, имеющиеся в статье [3], приведены к удобному виду для практического применения по аналогии.

Для убедительности исследований [4] и устранения имеющихся сомнений [1] проверим на модели, подходящей к геоиду Земли, формулы. полученные в статьях [3, 4]:

$$\Delta g = -\frac{\zeta_0}{a} g_e - \frac{g_e}{2\pi}\int \frac{\zeta - \zeta_0}{r^3} dS + \frac{W_0 - U_0}{a}; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial n^2} = \frac{4\Delta g_0}{a} + \frac{6\zeta_0}{a^2} g_e - \frac{2}{a^2}(W_0 - U_0) - \frac{1}{2\pi}\int \frac{\Delta g - \Delta g_0}{r^3} dS; \qquad (2)$$

$$\Delta g = -\frac{\zeta_0}{a} g_e - \frac{g_e}{2\pi a}\int \frac{\partial \zeta}{\partial r}\left(\frac{a}{r^2} - \frac{1}{2r}\right) dS + \frac{W_0 - U_0}{a}; \qquad (3)$$

$$\zeta_0 = \frac{W_0 - U_0}{g_e} - \frac{1}{4\pi a g_e}\int \Delta g dS - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial \zeta}{\partial r}\left(\frac{2}{r} - \frac{r}{2a^2}\right) dS, \qquad (4)$$

где $\Delta g = g - \gamma$; $r = 2a \sin\frac{\psi}{2}$; $dS = a^2 \sin\psi d\psi dA = r dr dA$; W_0, g — гравитационный потенциал и сила тяжести на геоиде; U_0, γ — нормальные их значения на уровенном земном эллипсоиде, большая полуось которого равна a; T — возмущающий потенциал, равный $W - U_0$, Δg — аномалия силы тяжести, n — внешняя нормаль геоида; r, ψ — линейное и угловое расстояние между фиксированной и текущей точками земной сферы (начало координат принято в центре сферы); dS — элемент ее поверхности; ζ, ζ_0 — высоты геоида относительно земного эллипсоида в текущей и фиксированной точках; A — азимут направления из фиксированной точки на текущую; g_e — экваториальная постоянная силы тяжести.

В качестве геоида модели примем земной эллипсоид Красовского. За отсчетную поверхность возьмем эллипсоид вращения, у которого большая полуось такая же, как в эллипсоиде Красовского, а малая на 100 м больше; центры эллипсоидов совпадают с центром земной сферы. Данная модель, как показано в работе [5], имеет такие характеристики гравитационного поля:

$$\Delta g = g_e \Delta\beta \sin^2 \Phi; \tag{5}$$

$$W_0 - U_0 = -\frac{2}{3} a g_e \Delta\alpha; \ \zeta = -a\Delta\alpha \sin^2 \Phi, \tag{6}$$

где $\Delta\alpha = 0{,}0000157$; $\Delta\beta = -0{,}0000158$.

Здесь $\Delta\alpha$ — разность в сжатиях по меридиану эллипсоидов; $\Delta\beta$ — разность постоянных β нормальных формул для силы тяжести на уровенных эллипсоидах; Φ — геоцентрическая широта. Отметим, что значения Δg, ζ, $W_0 - U_0$ получены как разности соответствующих значений для геоида и уровенного эллипсоида из соотношений

$$g = g_e(1 + \beta \sin^2 \Phi + \cdots); \quad \rho = a(1 - \alpha \sin^2 \Phi + \cdots);$$

$$W = a g_e \left(1 - \frac{2}{3}\alpha + \frac{11}{6} q + \cdots\right).$$

Вычислим аномалии силы тяжести Δg по формуле (1). Для этого подставим в нее данные модели

$$\Delta g = -\frac{g_e}{a}(-a\Delta\alpha \sin^2 \Phi) - \frac{g_e}{2\pi}(-a\Delta\alpha)\left(-\sin^2 \Phi + \frac{1}{3}\right)\frac{4\pi}{a} +$$

$$+ \frac{-\frac{2}{3} a g_e \Delta\alpha}{a} = -g_e \Delta\alpha \sin^2 \Phi, \tag{7}$$

причем учтем значение интеграла

$$\int \frac{\sin^2 \Phi - \sin^2 \Phi_0}{r^3} dS = \frac{4\pi}{a}\left(\frac{1}{3} - \sin^2 \Phi_0\right). \tag{8}$$

Сравнение выражений (5) и (7) свидетельствует о том, что по формуле (1) можно вычислять Δg на геоиде с относительной погрешностью порядка сжатия Земли.

Точно так же выполним для принятой модели вычисления по формуле (2):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial n^2} = \frac{4}{a}\Delta\beta \sin^2 \Phi + \frac{6}{a^2} g_e(-a\Delta\alpha \sin^2 \Phi) - \frac{2}{a^2}\left(-\frac{2}{3} a g_e \Delta\alpha\right) -$$

$$-\frac{1}{2\pi} g_e \Delta\beta \frac{4\pi}{a}\left(\frac{1}{3} - \sin^2 \Phi\right) = \frac{6}{a} g_e(\Delta\beta - \Delta\alpha) \sin^2 \Phi +$$

$$+\frac{2}{3} \cdot \frac{g_e}{a}(2\Delta\alpha - \Delta\beta). \qquad (9)$$

Известно, что на поверхности регуляризированного геоида

$$\frac{\partial^2 T}{\partial n^2} = -\frac{\partial \Delta g}{\partial n} + \frac{2\Delta g}{a} + \frac{6T}{a^2} - \frac{6}{a^2}(W_0 - U_0); \qquad (10)$$

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial n} = \frac{\partial g}{\partial n} - \frac{\partial \gamma_0}{\partial n} + \frac{2\Delta g}{a}; \; T = g_e\zeta + W_0 - U_0, \qquad (11)$$

где $\partial g/\partial n$ относится к поверхности геоида, а $\partial\gamma_0/\partial n$ — к поверхности уровенного эллипсоида. Формулы (10) и (11) записаны с относительной погрешностью порядка сжатия Земли. Пользуясь известной формулой для уровенного эллипсоида

$$\frac{\partial g}{\partial n} = -\frac{2g_e}{a}\left[1 + q + \alpha + \left(\frac{5}{2}q - \alpha\right)\sin^2 \Phi + \cdots\right],$$

где $q = \omega^2 a/g_e$; ω — угловая скорость суточного вращения Земли, для данной модели из соотношения (11) найдем

$$\frac{\partial \Delta g}{\partial n} = -\frac{2g_e}{a}\Delta\alpha(1 - 3\sin^2 \Phi) + \frac{2g_e}{a}\Delta\beta \sin^2 \Phi,$$

а из выражения (10) получим

$$\frac{\partial^2 T}{\partial n^2} = \frac{2g_e}{a}\Delta\alpha(1 - 3\sin^2 \Phi) - \frac{2g_e}{a}\Delta\beta \sin^2 \Phi +$$

$$+\frac{2g_e}{a}\Delta\beta \sin^2 \Phi + \frac{6}{a^2}\left(-a g_e \Delta\alpha \sin^2 \Phi - \frac{2}{3}\Delta\alpha g_e a\right) +$$

$$+\frac{6}{a^2} \cdot \frac{2}{3} a g_e \Delta\alpha = -\frac{12}{a} g_e \Delta\alpha \sin^2 \Phi + \frac{2}{a} g_e \Delta a. \qquad (12)$$

Сравнивая выражения (9) и (12), видим, что формула (2) тоже верна с относительной погрешностью порядка сжатия Земли.

Прежде чем проверить формулу (3), заметим, что ее можно получить из формулы (1), выполняя в интегральном выражении последней интегрирование по частям:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2a}\frac{\zeta-\zeta_0}{r^3}\,rdrdA = \left|\begin{array}{ll} u=\zeta-\zeta_0, & dv=\dfrac{dr}{r^2}\\ \partial u=\partial\zeta, & v=-\dfrac{1}{r}\end{array}\right| =$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{\zeta-\zeta_0}{r}\Big|_0^{2a}+\int_0^{2a}\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial r}\cdot dr\right]dA = -\frac{\pi}{a}(\zeta_\pi-\zeta_0)+$$

$$+\int_0^{2\pi}\int_0^{2a}\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial r}\cdot rdrdA = -\frac{\pi}{a}(\zeta_\pi-\zeta_0)+\int\frac{\partial\zeta}{\partial r}\cdot\frac{dS}{r^2}, \qquad (13)$$

где $\zeta_\pi-\zeta_0$ — значения высот геоида при $r=2a$ и $r=0$.

В работе [2] показано, что разность $\zeta_\pi-\zeta_0$ можно получить по формуле

$$\zeta_\pi-\zeta_0=\frac{1}{2\pi a^2}\int\frac{\partial\zeta}{\partial\psi}\cdot\frac{dS}{\sin\psi},$$

которая, с учетом замены дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial\psi}=\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial\psi}=\frac{a^2\sin\psi}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r},$$

имеет вид

$$\zeta_\pi-\zeta_0=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\partial\zeta}{\partial r}\cdot\frac{dS}{r}. \qquad (14)$$

После этих преобразований убеждаемся, что из формулы (1), заменяя в ней интеграл выражениями (13) и (14), легко получить формулу (3). Следовательно, проверять правильность формулы (3) нет смысла.

Приведем теперь подробный вывод формулы (4). Введя некоторую среднюю высоту геоида ζ_m, определяемую по формуле

$$\zeta_m=\frac{1}{2\pi a^2}\int\zeta dS, \qquad (15)$$

и выполняя в ней интегрирование по частям

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2a}\zeta rdrdA = \left|\begin{array}{ll} u=\zeta, & dv=rdr\\ du=d\zeta, & v=\dfrac{r^2}{2}\end{array}\right| =$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{\zeta r^2}{2}\Big|_0^{2a}-\int\frac{\partial\zeta}{\partial r}\cdot\frac{r^2}{2}dr\right]dA = 4\pi a^2-\int\frac{\partial\zeta}{\partial r}\cdot\frac{r}{2}dS,$$

из выражений (15) и (14) находим

$$\zeta_0 = \zeta_m - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial\zeta}{\partial r}\left(\frac{2}{r} - \frac{r}{2a^2}\right) dS.$$

Воспользовавшись известным [4] соотношением

$$\frac{g_e}{4\pi a^2}\int \zeta dS = W_0 - U_0 - \frac{1}{4\pi a}\int \Delta g dS,$$

получаем формулу (4).

Таким образом, изложенные выше рассуждения позволя сделать вывод, что предложенные в работе [3] формулы впол пригодны для практического применения. Погрешность вычис ния по ним элементов гравитационного поля регуляризиров ной Земли равна произведению определяемого элемента сжатие земного эллипсоида.

Список литературы: 1. *Мигаль Н. К.* Относительно статьи И. Ф. Мон «О методе изучения фигуры Земли без использования нормального поля». Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1963, вып. 6. 2. *Молоденский М.* Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. — /ЦНИИГАиК, 1960, вып. 131. 3. *Монин И. Ф.* К теории гравитационного по регуляризированной Земли.— Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 19 вып. 3. 4. *Монин И. Ф.* О практическом применении некоторых соотношен гравитационного поля регуляризированной Земли. — Геодезия, картограф и аэрофотосъемка, 1976, вып. 23. 5. *Монин И. Ф.* К определению фигур Земли с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия земно эллипсоида. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1962, вып. 4.

Работа поступила в редколлегию 31 окт ря 1977 года. Рекомендована кафед прикладной геодезии Львовского полит нического института.

УДК 528.21/22

И. Ф. МОНИН, д-р техн. наук
Львовский политехнический институт

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ФОРМУЛЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ФИГУРУ ГЕОИДА

Как известно, при помощи гравиметрической формулы Сток са можно определить фигуру геоида с относительной погрешно стью порядка сжатия Земли. Еще А. Пуанкаре [8] и П. Рудски [9], применяя эллиптические функции Ляме, уточняли задач об определении фигуры геоида, данную Д. Стоксом. Ими состав лено граничное условие для возмущающего гравитационног потенциала Земли, отнесенное к эллипсоиду вращения, и общих чертах намечен путь решения задачи. При этом необхо димо было определить форму геоида с относительной погреш ностью порядка квадрата сжатия Земли.