из выражений (15) и (14) находим

$$\zeta_0 = \zeta_m - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial \zeta}{\partial r}\left(\frac{2}{r} - \frac{r}{2a^2}\right) dS.$$

Воспользовавшись известным [4] соотношением

$$\frac{g_e}{4\pi a^2}\int \zeta dS = W_0 - U_0 - \frac{1}{4\pi a}\int \Delta g dS,$$

получаем формулу (4).

Таким образом, изложенные выше рассуждения позволяю сделать вывод, что предложенные в работе [3] формулы впол пригодны для практического применения. Погрешность вычисле ния по ним элементов гравитационного поля регуляризирован ной Земли равна произведению определяемого элемента н сжатие земного эллипсоида.

Список литературы: 1. *Мигаль Н. К.* Относительно статьи И. Ф. Монин «О методе изучения фигуры Земли без использования нормального поля». — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1963, вып. 6. 2. *Молоденский М. С.* Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. — Тр /ЦНИИГАиК, 1960, вып. 131. 3. *Монин И. Ф.* К теории гравитационного пол регуляризированной Земли.— Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1960 вып. 3. 4. *Монин И. Ф.* О практическом применении некоторых соотношени гравитационного поля регуляризированной Земли. — Геодезия, картографи и аэрофотосъемка, 1976, вып. 23. 5. *Монин И. Ф.* К определению фигуры Земли с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия земного эллипсоида. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1962, вып. 4.

Работа поступила в редколлегию 31 октяб ря 1977 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политех нического института.

УДК 528.21/22

И. Ф. МОНИН, д-р техн. наук
Львовский политехнический институт

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ФОРМУЛЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ФИГУРУ ГЕОИДА

Как известно, при помощи гравиметрической формулы Стокса можно определить фигуру геоида с относительной погрешностью порядка сжатия Земли. Еще А. Пуанкаре [8] и П. Рудский [9], применяя эллиптические функции Ляме, уточняли задачу об определении фигуры геоида, данную Д. Стоксом. Ими составлено граничное условие для возмущающего гравитационного потенциала Земли, отнесенное к эллипсоиду вращения, и в общих чертах намечен путь решения задачи. При этом необходимо было определить форму геоида с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия Земли.

Д. В. Загребин [1, 2], используя аппарат функций Ляме, дал полное решение поставленной задачи. Причем, учитывая граничное условие, отнесенное к поверхности эллипсоида вращения, и представляя решение в виде ряда функций Ляме, которые для эллипсоида вращения вырождаются в сферические функции, он в результате сложных математических преобразований нашел суммы нескольких рядов, входящих в окончательное решение. Им впервые получена формула, позволяющая определить фигуру регуляризированного геоида с погрешностью порядка квадрата сжатия земного эллипсоида.

Интересное решение поставленной задачи выполнил М. С. Молоденский [3]. С помощью интегральной формулы Грина для гармонических функций и граничного условия для возмущающего потенциала, отнесенного к поверхности земного эллипсоида, он составил интегральное уравнение относительно возмущающего потенциала. Представляя решение в виде ряда по степеням малого параметра (эксцентриситета эллипсоида), легко свести исходное интегральное уравнение к серии интегральных уравнений, разрешаемых с помощью известной функции Стокса. Следует отметить, что решение М. С. Молоденского значительно проще и изящнее, чем Д. В. Загребина. Оно удобнее и в практическом применении.

Наиболее общее решение данной задачи, выполненное с помощью метода интегральных уравнений и малого параметра, приведено в статьях [6, 7].

М. С. Молоденский [4], разрабатывая теорию определения фигуры физической поверхности Земли, наметил другой путь определения формы Земли с высокой точностью. Сущность этого приема заключается в отыскании высот квазигеоида в первом, втором, третьем и т. д. приближениях. Применяя прием М. С. Молоденского, в статье [5] решена задача об определении формы регуляризированного геоида с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия Земли. По формуле Стокса фигура геоида ищется в первом приближении. Причем высоты геоида над земным эллипсоидом имеют порядок, равный $a\alpha^2$, где a — большая полуось земного эллипсоида; α — его сжатие. Это первое приближение. Во втором приближении ищется поправка к первому приближению, имеющая порядок, равный $a\alpha^3$. Сумма этих двух высот определяет фигуру геоида с относительной погрешностью порядка α^2. Формула, полученная в статье [5], имеет следующий вид:

$$\zeta = \frac{W_0 - U_0}{g_e} + G + \frac{3}{8\pi}\int G\left[S(\psi) - 1\right] d\sigma, \tag{1}$$

где $G = G_1 + G_2$, $G_1 = \dfrac{a}{4\pi}\left(1 + \dfrac{e^2}{4}\sin^2 \Phi_0\right)\displaystyle\int \dfrac{g - \gamma_0}{g_e} \times$

$$\times \left(1 - \frac{3}{4}e^2 \sin^2 \Phi\right)\frac{d\sigma}{\sin\frac{\psi}{2}}; \quad G_2 = -\zeta_0^S\left(1 + \beta \sin^2 \Phi_0\right) +$$

$$+\frac{3}{8\pi}\left(1+\frac{4}{3}q+\frac{2}{3}e^2+\frac{e^2}{4}\sin^2\Phi_0\right)\times$$

$$\times\int\zeta^s\left[1+\left(\beta-\frac{23}{12}e^2\right)\sin^2\Phi-e^2\frac{(\sin\Phi-\sin\Phi_0)^2}{12\sin^2\frac{\psi}{2}}\right]\frac{d\sigma}{\sin\frac{\psi}{2}},$$

Φ, Φ_0 — геоцентрические широты переменной и постоянной т чек поверхности эллипсоида; ζ^s, ζ_0^s — высоты геоида для тех точек, полученные по формуле Стокса и имеющие порядо равный $a\alpha^2$; $d\sigma$ — элемент поверхности единичной сферы; a большая полуось земного эллипсоида, e — его первый эксце триситет; W_0, U_0 — гравитационные потенциалы геоида и ур венного эллипсоида на их поверхностях; g, γ — их силы тяж сти; g_e — экваториальная постоянная силы тяжести, $S(\psi)$ функция Стокса, ψ — угловое расстояние между постоянной переменной точками эллипсоида; β — известная постоянна в нормальной формуле для силы тяжести: $\beta=0{,}005302925$; ζ поправка в ζ^s, имеющая порядок, равный $a\alpha^3$; $q=\omega^2 a/g_e$ — по стоянная; ω — угловая скорость суточного вращения Земл Заметим, что аномалии силы тяжести $\Delta g=g-\gamma_0$ необходим здесь иметь с точностью порядка $g\alpha^4$.

Исследуем формулу (1) на модели, взятой из статьи [6] Данная модель имеет следующие характеристики:

Геоид	Эллипсоид
$g_e=978049$ мгл	$\gamma_e=978049$ мгл
$\beta=0{,}005302925$	$\beta'=0{,}005318670$
$\beta_1=0{,}000005849$	$\beta_1'=0{,}000005828$
$\beta_2=0{,}000000032$	$\beta_2'=0{,}000000032$
$\alpha=0{,}003352330$	$\alpha'=0{,}003336652$
$e^2=0{,}006693422$	$e'^2=0{,}006662170$
$q=0{,}003467749$	$a=6378245$ м.

Аномалии силы тяжести для модели определяются по формул

$$\Delta g=g_e(\delta_1\sin^2\Phi+\delta\sin^2 2\Phi);\quad \delta_1=\beta-\beta';$$

$$\delta_2=\beta_1-\beta_1';\quad \Delta\alpha=\alpha-\alpha';\quad \delta=\frac{e^2}{2}\delta_1-\delta_2+\beta\Delta\alpha. \tag{2}$$

Высота геоида, полученная геометрическим путем, вычисляется следующим образом:

$$\zeta'=-a\left[\alpha-\alpha'+\frac{3}{2}(\alpha^2-\alpha'^2)+2(\alpha^3-\alpha'^3)\right]\sin^2\Phi+$$

$$+a\left[\frac{3}{2}(\alpha^2-\alpha'^2)+\frac{9}{2}(\alpha^3-\alpha'^3)\right]\sin^4\Phi-\frac{5}{2}a(\alpha^3-\alpha'^3)\sin^6\Phi. \tag{3}$$

Разность гравитационных потенциалов геоида и уровенного эллипсоида на их поверхностях

$$W_0 - U_0 = -g_e a\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{5}(\alpha + \alpha') + \frac{4}{7}q\right]\Delta\alpha. \tag{4}$$

Прежде всего найдем высоту геоида ζ^S для данной модели по формуле Стокса:

$$\zeta^S = \frac{a}{4\pi}\int \frac{\Delta g}{g_e} S(\psi)\, d\sigma + \frac{W_0 - U_0}{g_e} - \frac{a}{4\pi}\int \frac{\Delta g}{g_e}\, d\sigma. \tag{5}$$

Напомним, что в формуле Стокса аномалии силы тяжести необходимо знать с точностью порядка $g\alpha^3$, т. е. в формуле (2) нужно оставить только первое слагаемое: $\Delta g = g_e \delta_1 \sin^2 \Phi$.

Принимая во внимание значение интегралов

$$\int \sin^2 \Phi\, d\sigma = \frac{4\pi}{3}; \quad \int S(\psi) \sin^2 \Phi\, d\sigma = 4\pi\left(\sin^2 \Phi_0 - \frac{1}{3}\right)$$

и то, что с принятой точностью (порядка $W\alpha^3$)

$$W_0 - U_0 = \frac{2}{3} a\delta_1,$$

по формуле (5) найдем

$$\zeta^S = a\, \delta_1 \sin^2 \Phi. \tag{6}$$

Вычислим теперь G_1 и G_2. Используя формулы (2), (6) и значения интегралов

$$\int \frac{\sin^2 \Phi}{\sin \frac{\psi}{2}}\, d\sigma = \frac{8\pi}{15}(4 + 3\sin^2 \Phi_0);$$

$$\int \frac{\sin^2 \Phi\, (\sin \Phi - \sin \Phi_0)^2}{8 \sin^3 \frac{\psi}{2}}\, d\sigma = \frac{4\pi}{105}(12 - \sin \Phi_0);$$

$$\int \frac{\sin^4 \Phi}{\sin \frac{\psi}{2}}\, d\sigma = 8\pi\left(\frac{16}{105} + \frac{8}{105}\sin^2 \Phi_0 + \frac{1}{9}\sin^4 \Phi_0\right),$$

после сложных вычислений получаем:

$$G_1 = a\left[\frac{8}{15}\delta_1 + \frac{32}{35}\delta - \frac{8}{35}e^2\delta_1 + \left(\frac{2}{5}\delta_1 + \frac{104}{105}\delta + \frac{2}{105}e^2\delta_1\right) \times \right.$$

$$\left. \times \sin^2 \Phi - \left(\frac{8}{9}\delta + \frac{1}{15}e^2\delta_1\right)\sin^4 \Phi\right];$$

$$G_2 = a\left[\frac{4}{5}\delta_1 + \frac{16}{35}\beta\delta_1 + \frac{16}{15}q\delta_1 - \frac{16}{35}e^2\delta_1 + \left(\frac{8}{35}\delta_1\beta - \frac{2}{5}\delta_1 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{6}{35}e^2\delta_1 + \frac{4}{5}q\delta_1\right)\sin^2\Phi - \left(\frac{2}{3}\beta\delta_1 + \frac{22}{45}e^2\delta_1\right)\sin^4\Phi\right];$$
$$G = a\left[\frac{4}{3}\delta_1 + \frac{16}{35}\beta\delta_1 + \frac{32}{35}\delta + \frac{16}{15}q\delta_1 - \frac{24}{35}e^2\delta_1 + \left(\frac{8}{35}\beta\delta_1 + \frac{104}{105}\delta + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{4}{5}q\delta_1 + \frac{4}{21}e^2\delta_1\right)\sin^2\Phi - \left(\frac{2}{3}\beta\delta_1 + \frac{8}{9}\delta + \frac{5}{9}e^2\delta_1\right)\sin^4\Phi\right].$$

Подставляя значение G в формулу (1) и учитывая интегралы

$$\int S(\psi)\,d\sigma = 0; \quad \int S(\psi)\sin^2\Phi d\sigma = 4\pi\left(\sin^2\Phi_0 - \frac{1}{3}\right);$$
$$\int S(\psi)\sin^4\Phi d\sigma = 4\pi\left(-\frac{9}{35} + \frac{4}{7}\sin^2\Phi_0 + \frac{1}{3}\sin^4\Phi_0\right),$$

находим поправку в высоту геоида ζ^S:

$$\zeta = \frac{W_0 - U_0}{g_e} + a\left\{-\frac{2}{3}\delta_1 - \frac{4}{3}q\delta_1 - \frac{88}{105}\delta + \frac{8}{15}e^2\delta_1 + \right.$$
$$\left. + \left(2q\delta_1 + \frac{12}{7}\delta\right)\sin^2\Phi - \left(\beta\delta_1 + \frac{4}{3}\delta + \frac{5}{6}e^2\delta_1\right)\sin^4\Phi\right\}. \qquad (7)$$

Итак, для принятой модели окончательная высота геоида с погрешностью порядка $\zeta'\alpha^2$ может быть вычислена по формулам (6) и (7) или по формуле

$$\zeta' = \frac{W_0 - U_0}{g_e} + a\left\{-\frac{2}{3}\delta_1 - \frac{4}{3}q\delta_1 - \frac{88}{105}\delta + \frac{8}{15}e^2\delta_1 + \right.$$
$$\left. + \left(\delta_1 + 2q\delta_1 + \frac{12}{7}\delta\right)\sin^2\Phi - \left(\beta\delta_1 + \frac{4}{3}\delta + \frac{5}{6}e^2\delta_1\right)\sin^4\Phi\right\}. \qquad (8)$$

Заметим, что для данной модели должно выполняться следующее условие: при $\Phi = 0$ высота геоида $\zeta' = \zeta^S + \zeta = 0$. Следовательно, из формулы (7) получаем

$$W_0 - U_0 = ag_e\left(\frac{2}{3}\delta_1 + \frac{4}{3}q\delta_1 + \frac{88}{105}\delta - \frac{8}{15}e^2\delta_1\right).$$

Эту же разность потенциалов можно найти, пользуясь формулой (4), которая выведена другим путем. Погрешность в высоте геоида за счет несовпадения этих разностей, как легко проверить, равна 0,051 м, что вполне допустимо.

Таким образом, в формуле (8) постоянную часть, определяющую разность $W_0 - U_0$, можно не принимать во внимание. Подставляя в нее числовые данные, запишем

$$\zeta' = -101{,}01099 \sin^2 \Phi + 1{,}00776 \sin^4 \Phi. \tag{9}$$

Ниже приведены результаты вычислений высот геоида по формулам (9), (3) и их разности $\Delta\zeta$:

0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0	3,045	11,802	25,190	41,563	58,929	75,191	88,409	97,017	100,003
0	3,045	11,804	25,191	41,563	58,926	75,188	88,405	96,988	99,999
0	0,000	0,002	0,001	0,000	− 0,003	− 0,003	− 0,004	− 0,029	− 0,004

Сравнение вычисленных высот геоида по формуле (9), полученной гравиметрическим методом, и по формуле (3), которая выведена геометрическим путем, дает возможность судить о точности формулы (1). Как и следовало ожидать, точность этой формулы имеет порядок $\zeta'\alpha^2$.

В заключение приведем другое обоснование формулы (1). В работе [7] показано, что интегральное уравнение, определяющее высоту геоида ζ' с относительной погрешностью порядка α^2, имеет вид

$$\zeta'\gamma_0 + 2(W_0 - U_0) = \frac{1}{2\pi}\int \zeta'\gamma_0 \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r\gamma_0}\cdot\frac{\partial\gamma_0}{\partial n}\right) dS + \frac{1}{2\pi}\int \Delta g \frac{dS}{r}, \tag{10}$$

где r — расстояние между текущей и данной точками поверхности эллипсоида; dS — элемент его поверхности; n — направление внешней нормали.

При помощи разложений

$$-\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{1}{4a^2 \sin\frac{\psi}{2}}\left[1 + \frac{e^2}{4}\sin^2\Phi_0 - \frac{e^2}{4}\sin^2\Phi + \frac{e^2}{4}\cdot\frac{(\sin\Phi - \sin\Phi_0)^2}{\sin^2\frac{\psi}{2}} + \cdots\right];$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2a\sin\frac{\psi}{2}}\left(1 + \frac{e^2}{4}\sin^2\Phi_0 + \frac{e^2}{4}\sin^2\Phi + \cdots\right);$$

$$-\frac{1}{\gamma_0}\cdot\frac{\partial\gamma_0}{\partial n} = \frac{2}{a}\left(1 + \frac{e^2}{2} - e^2\sin^2\Phi + q + \cdots\right);$$

$$\gamma_0 = \gamma_e(1 + \beta\sin^2\Phi + \cdots);\ dS = a^2(1 - e^2\sin^2\Phi + \cdots)\, d\sigma;$$

$$d\sigma = \cos\Phi\, d\Phi\, dL$$

уравнение (10), не нарушая принятой точности, приведем к виду

$$\zeta'(1+\beta\sin^2\Phi_0)+\frac{2}{g_e}(W_0-U_0)=\frac{3}{4\pi}\int\zeta'\Bigg[1+\frac{2}{3}e^2+\frac{4}{3}q+\frac{e^2}{4}\sin^2\Phi_0+\left(\beta-\frac{23}{12}e^2\right)\sin^2\Phi-e^2\frac{(\sin\Phi-\sin\Phi_0)^2}{12\sin^2\frac{\psi}{2}}\Bigg]\frac{d\sigma}{2\sin\frac{\psi}{2}}+$$
$$+\frac{a}{2\pi}\int\frac{g-\gamma_0}{\gamma_e}\left(1+\frac{e^2}{4}\sin^2\Phi_0-\frac{3}{4}e^2\sin^2\Phi\right)\frac{d\sigma}{2\sin\frac{\psi}{2}}. \qquad (11)$$

В равенстве

$$\zeta'=\zeta^S+\zeta \qquad (12)$$

ζ^S определяется по формуле Стокса (5) и имеет порядок $a\alpha^2$, а ζ (поправка в ζ^S) имеет порядок $a\alpha^3$. Тогда, подставляя в уравнение (11) вместо ζ' выражение (12), нетрудно получить интегральное уравнение относительно ζ:

$$\zeta+\frac{2}{g_e}(W_0-U_0)=\frac{3}{4\pi}\int\zeta\frac{d\sigma}{2\sin\frac{\psi}{2}}+G, \qquad (13)$$

где G — обозначение, принятое в формуле (1), которая является решением уравнения (13), в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

Отметим, что при выводе уравнения (13), малые величины порядка $\zeta\approx a\alpha^3$, умноженные на β или на e^2, или на q были отброшены как малые четвертого порядка. Учитывались же только малые величины третьего порядка.

Список литературы: 1. *Загребин Д. В.* Теория регуляризированного геоида. — Тр. ин-та теоретической астрономии АН СССР, 1952, вып. 1. 2. *Загребин Д. В.* О формуле Стокса для случая эллипсоидальной уровенной поверхности. — Научн. записки Львовского политехн. ин-та. Серия геодезическая, 1962, № 9. 3. *Молоденский М. С.* Решение задачи Стокса с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия Земли. — Тр./ЦНИИГАиК, 1956, вып. 112. 4. *Молоденский М. С.* Внешнее гравитационное поле и фигура физической поверхности Земли. — Изв. АН СССР. Серия географическая и геофизическая, 1948, № 3. 5. *Монін І. Ф.* Про визначення фігури геоїда з врахуванням величин третього порядку. — ДАН УРСР, 1965, № 5. 6. *Монин И. Ф.* К определению фигуры Земли с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия земного эллипсоида. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1962, вып. 4. 7. *Монин И. Ф.* Определение фигуры регуляризированного геоида с учетом третьего порядка. — Научн. записки Львовского политехн. ин-та. Серия геодезическая, 1962, № 9. 8. *Poincaré H.* Les mesures de Gravite et la Géodésie, Bull. Astr., t. 18, 1901. 9. *Rudzki P.* Sur la détermination de la figure de la Terre d'aprés les mesures de la Gravité, Bull. Astr., t. 22. 1905.

Работа поступила в редколлегию 31 октября 1977 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.