

И. Ф. МОНИН, д-р техн. наук
Львовский политехнический институт

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ФОРМУЛЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ ФИГУРУ ГЕОИДА

Как известно, при помощи гравиметрической формулы Стокса можно определить фигуру геоида с относительной погрешностью порядка сжатия Земли. Еще А. Пуанкаре [8] и П. Рудский [9], применяя эллиптические функции Ляме, уточняли задачу об определении фигуры геоида, данную Д. Стоксом. Ими составлено граничное условие для возмущающего гравитационного потенциала Земли, отнесенное к эллипсоиду вращения, и в общих чертах намечен путь решения задачи. При этом необходимо было определить форму геоида с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия Земли.

Д. В. Загребин [1, 2], используя аппарат функций Ляме, дал полное решение поставленной задачи. При этом, учитывая граничное условие, отнесенное к поверхности эллипсоида вращения, и представляя решение в виде ряда функций Ляме, которые для эллипсоида вращения вырождаются в сферические функции, он в результате сложных математических преобразований нашел суммы нескольких рядов, входящих в окончательное решение. Им впервые получена формула, позволяющая определить фигуру регуляризированного геоида с погрешностью порядка квадрата сжатия земного эллипсоида.

Интересное решение поставленной задачи выполнил М. С. Молоденский [3]. С помощью интегральной формулы Грина для гармонических функций и граничного условия для возмущающего потенциала, отнесенного к поверхности земного эллипсоида, он составил интегральное уравнение относительно возмущающего потенциала. Представляя решение в виде ряда по степеням малого параметра (эксцентриситета эллипсоида), легко свести исходное интегральное уравнение к серии интегральных уравнений, разрешаемых с помощью известной функции Стокса. Следует отметить, что решение М. С. Молоденского значительно проще и изящнее, чем Д. В. Загребина. Оно удобнее и в практическом применении.

Наиболее общее решение данной задачи, выполненное с помощью метода интегральных уравнений и малого параметра, приведено в статьях [6, 7].

М. С. Молоденский [4], разрабатывая теорию определения фигуры физической поверхности Земли, наметил другой путь определения формы Земли с высокой точностью. Сущность этого приема заключается в отыскании высот квазигеоида в первом, втором, третьем и т. д. приближениях. Применяя прием М. С. Молоденского, в статье [5] решена задача об определении формы регуляризированного геоида с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия Земли. По формуле Стокса фигура геоида ищется в первом приближении. При этом высоты геоида над земным эллипсоидом имеют порядок, равный aa^2 , где a — большая полуось земного эллипсоида; α — его сжатие. Это первое приближение. Во втором приближении ищется поправка к первому приближению, имеющая порядок, равный aa^3 . Сумма этих двух высот определяет фигуру геоида с относительной погрешностью порядка α^2 . Формула, полученная в статье [5], имеет следующий вид:

$$\zeta = \frac{W_0 - U_0}{g_e} + G + \frac{3}{8\pi} \int G [S(\psi) - 1] d\sigma, \quad (1)$$

$$\text{где } G = G_1 + G_2, \quad G_1 = \frac{a}{4\pi} \left(1 + \frac{e^2}{4} \sin^2 \Phi_0 \right) \int \frac{g - \gamma_0}{g_e} \times \\ \times \left(1 - \frac{3}{4} e^2 \sin^2 \Phi \right) \frac{d\sigma}{\sin \frac{\psi}{2}}; \quad G_2 = -\zeta_0^S (1 + \beta \sin^2 \Phi_0) +$$

$$+ \frac{3}{8\pi} \left(1 + \frac{4}{3}q + \frac{2}{3}e^2 + \frac{e^2}{4} \sin^2 \Phi_0 \right) \times \\ \times \int \zeta^S \left[1 + \left(\beta - \frac{23}{12}e^2 \right) \sin^2 \Phi - e^2 \frac{(\sin \Phi - \sin \Phi_0)^2}{12 \sin^2 \frac{\psi}{2}} \right] \frac{d\sigma}{\sin \frac{\psi}{2}},$$

Φ, Φ_0 — геоцентрические широты переменной и постоянной точек поверхности эллипсоида; ζ^S, ζ_0^S — высоты геоида для тех точек, полученные по формуле Стокса и имеющие порядок $a\alpha^2$; $d\sigma$ — элемент поверхности единичной сферы; a — большая полуось земного эллипсоида, e — его первый эксцентриситет; W_0, U_0 — гравитационные потенциалы геоида и урванного эллипсоида на их поверхностях; g, γ — их силы тяжести; g_e — экваториальная постоянная силы тяжести, $S(\psi)$ — функция Стокса, ψ — угловое расстояние между постоянной и переменной точками эллипсоида; β — известная постоянная в нормальной формуле для силы тяжести: $\beta = 0,005302925$; ζ — поправка в ζ^S , имеющая порядок, равный $a\alpha^3$; $q = \omega^2 a / g_e$ — постоянная; ω — угловая скорость суточного вращения Земли. Заметим, что аномалии силы тяжести $\Delta g = g - \gamma_0$ необходимо здесь иметь с точностью порядка $g\alpha^4$.

Исследуем формулу (1) на модели, взятой из статьи [6]. Данная модель имеет следующие характеристики:

Геоид	Эллипсоид
$g_e = 978049$ мгл	$\gamma_e = 978049$ мгл
$\beta = 0,005302925$	$\beta' = 0,005318670$
$\beta_1 = 0,000005849$	$\beta_1' = 0,000005828$
$\beta_2 = 0,000000032$	$\beta_2' = 0,000000032$
$\alpha = 0,003352330$	$\alpha' = 0,003336652$
$e^2 = 0,006693422$	$e'^2 = 0,006662170$
$q = 0,003467749$	$a = 6378245$ м.

Аномалии силы тяжести для модели определяются по формуле

$$\Delta g = g_e (\delta_1 \sin^2 \Phi + \delta \sin^2 2\Phi); \quad \delta_1 = \beta - \beta';$$

$$\delta_2 = \beta_1 - \beta_1'; \quad \Delta \alpha = \alpha - \alpha'; \quad \delta = \frac{e^2}{2} \delta_1 - \delta_2 + \beta \Delta \alpha. \quad (2)$$

Высота геоида, полученная геометрическим путем, вычисляется следующим образом:

$$\zeta' = -a \left[\alpha - \alpha' + \frac{3}{2}(\alpha^2 - \alpha'^2) + 2(\alpha^3 - \alpha'^3) \right] \sin^2 \Phi + \\ + a \left[\frac{3}{2}(\alpha^2 - \alpha'^2) + \frac{9}{2}(\alpha^3 - \alpha'^3) \right] \sin^4 \Phi - \frac{5}{2}a(\alpha^3 - \alpha'^3) \sin^6 \Phi. \quad (3)$$

Разность гравитационных потенциалов геоида и уровенного эллипсоида на их поверхностях

$$W_0 - U_0 = -g_e a \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{5} (\alpha + \alpha') + \frac{4}{7} q \right] \Delta \alpha. \quad (4)$$

Прежде всего найдем высоту геоида ζ^S для данной модели по формуле Стокса:

$$\zeta^S = \frac{a}{4\pi} \int \frac{\Delta g}{g_e} S(\psi) d\sigma + \frac{W_0 - U_0}{g_e} - \frac{a}{4\pi} \int \frac{\Delta g}{g_e} d\sigma. \quad (5)$$

Напомним, что в формуле Стокса аномалии силы тяжести необходимо знать с точностью порядка $g\alpha^3$, т. е. в формуле (2) нужно оставить только первое слагаемое: $\Delta g = g_e \delta_1 \sin^2 \Phi$.

Принимая во внимание значение интегралов

$$\int \sin^2 \Phi d\sigma = \frac{4\pi}{3}; \quad \int S(\psi) \sin^2 \Phi d\sigma = 4\pi \left(\sin^2 \Phi_0 - \frac{1}{3} \right)$$

и то, что с принятой точностью (порядка $W\alpha^3$)

$$W_0 - U_0 = \frac{2}{3} a \delta_1,$$

по формуле (5) найдем

$$\zeta^S = a \delta_1 \sin^2 \Phi. \quad (6)$$

Вычислим теперь G_1 и G_2 . Используя формулы (2), (6) и значения интегралов

$$\int \frac{\sin^2 \Phi}{\sin \frac{\psi}{2}} d\sigma = \frac{8\pi}{15} (4 + 3 \sin^2 \Phi_0);$$

$$\int \frac{\sin^2 \Phi (\sin \Phi - \sin \Phi_0)^2}{8 \sin^3 \frac{\psi}{2}} d\sigma = \frac{4\pi}{105} (12 - \sin \Phi_0);$$

$$\int \frac{\sin^4 \Phi}{\sin \frac{\psi}{2}} d\sigma = 8\pi \left(\frac{16}{105} + \frac{8}{105} \sin^2 \Phi_0 + \frac{1}{9} \sin^4 \Phi_0 \right),$$

после сложных вычислений получаем:

$$G_1 = a \left[\frac{8}{15} \delta_1 + \frac{32}{35} \delta - \frac{8}{35} e^2 \delta_1 + \left(\frac{2}{5} \delta_1 + \frac{104}{105} \delta + \frac{2}{105} e^2 \delta_1 \right) \times \right. \\ \left. \times \sin^2 \Phi - \left(\frac{8}{9} \delta + \frac{1}{15} e^2 \delta_1 \right) \sin^4 \Phi \right];$$

$$G_2 = a \left[\frac{4}{5} \delta_1 + \frac{16}{35} \beta \delta_1 + \frac{16}{15} q \delta_1 - \frac{16}{35} e^2 \delta_1 + \left(\frac{8}{35} \delta_1 \beta - \frac{2}{5} \delta_1 + \frac{6}{35} e^2 \delta_1 + \frac{4}{5} q \delta_1 \right) \sin^2 \Phi - \left(\frac{2}{3} \beta \delta_1 + \frac{22}{45} e^2 \delta_1 \right) \sin^4 \Phi \right];$$

$$G = a \left[\frac{4}{3} \delta_1 + \frac{16}{35} \beta \delta_1 + \frac{32}{35} \delta + \frac{16}{15} q \delta_1 - \frac{24}{35} e^2 \delta_1 + \left(\frac{8}{35} \beta \delta_1 + \frac{104}{105} \delta + \frac{4}{5} q \delta_1 + \frac{4}{21} e^2 \delta_1 \right) \sin^2 \Phi - \left(\frac{2}{3} \beta \delta_1 + \frac{8}{9} \delta + \frac{5}{9} e^2 \delta_1 \right) \sin^4 \Phi \right].$$

Подставляя значение G в формулу (1) и учитывая интегралы

$$\int S(\psi) d\sigma = 0; \quad \int S(\psi) \sin^2 \Phi d\sigma = 4\pi \left(\sin^2 \Phi_0 - \frac{1}{3} \right);$$

$$\int S(\psi) \sin^4 \Phi d\sigma = 4\pi \left(-\frac{9}{35} + \frac{4}{7} \sin^2 \Phi_0 + \frac{1}{3} \sin^4 \Phi_0 \right),$$

находим поправку в высоту геоида ζ^S :

$$\zeta = \frac{W_0 - U_0}{g_e} + a \left\{ -\frac{2}{3} \delta_1 - \frac{4}{3} q \delta_1 - \frac{88}{105} \delta + \frac{8}{15} e^2 \delta_1 + \left(2q \delta_1 + \frac{12}{7} \delta \right) \sin^2 \Phi - \left(\beta \delta_1 + \frac{4}{3} \delta + \frac{5}{6} e^2 \delta_1 \right) \sin^4 \Phi \right\}. \quad (7)$$

Итак, для принятой модели окончательная высота геоида с погрешностью порядка $\zeta' \alpha^2$ может быть вычислена по формулам (6) и (7) или по формуле

$$\zeta' = \frac{W_0 - U_0}{g_e} + a \left\{ -\frac{2}{3} \delta_1 - \frac{4}{3} q \delta_1 - \frac{88}{105} \delta + \frac{8}{15} e^2 \delta_1 + \left(\delta_1 + 2q \delta_1 + \frac{12}{7} \delta \right) \sin^2 \Phi - \left(\beta \delta_1 + \frac{4}{3} \delta + \frac{5}{6} e^2 \delta_1 \right) \sin^4 \Phi \right\}. \quad (8)$$

Заметим, что для данной модели должно выполняться следующее условие: при $\Phi=0$ высота геоида $\zeta' = \zeta^S + \zeta = 0$. Следовательно, из формулы (7) получаем

$$W_0 - U_0 = a g_e \left(\frac{2}{3} \delta_1 + \frac{4}{3} q \delta_1 + \frac{88}{105} \delta - \frac{8}{15} e^2 \delta_1 \right).$$

Эту же разность потенциалов можно найти, пользуясь формулой (4), которая выведена другим путем. Погрешность в высоте геоида за счет несовпадения этих разностей, как легко проверить, равна 0,051 м, что вполне допустимо.

Таким образом, в формуле (8) постоянную часть, определяющую разность $W_0 - U_0$, можно не принимать во внимание. Подставляя в нее числовые данные, запишем

$$\zeta' = -101,01099 \sin^2 \Phi + 1,00776 \sin^4 \Phi. \quad (9)$$

Ниже приведены результаты вычислений высот геоида по формулам (9), (3) и их разности $\Delta\zeta$:

Φ°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0	3,045	11,802	25,190	41,563	58,929	75,191	88,409	97,017	100,003
0	3,045	11,804	25,191	41,563	58,926	75,188	88,405	96,988	99,999
0	0,000	0,002	0,001	0,000	- 0,003	- 0,003	- 0,004	- 0,029	- 0,004

Сравнение вычисленных высот геоида по формуле (9), полученной гравиметрическим методом, и по формуле (3), которая выведена геометрическим путем, дает возможность судить о точности формулы (1). Как и следовало ожидать, точность этой формулы имеет порядок $\zeta'\alpha^2$.

В заключение приведем другое обоснование формулы (1). В работе [7] показано, что интегральное уравнение, определяющее высоту геоида ζ' с относительной погрешностью порядка α^2 , имеет вид

$$\zeta' \gamma_0 + 2(W_0 - U_0) = \frac{1}{2\pi} \int \zeta' \gamma_0 \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r \gamma_0} \cdot \frac{\partial \gamma_0}{\partial n} \right) dS + \frac{1}{2\pi} \int \Delta g \frac{dS}{r}, \quad (10)$$

где r — расстояние между текущей и данной точками поверхности эллипсоида; dS — элемент его поверхности; n — направление внешней нормали.

При помощи разложений

$$-\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{1}{4a^2 \sin \frac{\phi}{2}} \left[1 + \frac{e^2}{4} \sin^2 \Phi_0 - \frac{e^2}{4} \sin^2 \Phi + \right. \\ \left. + \frac{e^2}{4} \cdot \frac{(\sin \Phi - \sin \Phi_0)^2}{\sin^2 \frac{\phi}{2}} + \dots \right];$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2a \sin \frac{\phi}{2}} \left(1 + \frac{e^2}{4} \sin^2 \Phi_0 + \frac{e^2}{4} \sin^2 \Phi + \dots \right);$$

$$-\frac{1}{\gamma_0} \cdot \frac{\partial \gamma_0}{\partial n} = \frac{2}{a} \left(1 + \frac{e^2}{2} - e^2 \sin^2 \Phi + q + \dots \right);$$

$$\gamma_0 = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 \Phi + \dots); \quad dS = a^2 (1 - e^2 \sin^2 \Phi + \dots) d\sigma;$$

$$d\sigma = \cos \Phi d\Phi dL$$

уравнение (10), не нарушая принятой точности, приведем к виду

$$\begin{aligned} \zeta' (1 + \beta \sin^2 \Phi_0) + \frac{2}{g_e} (W_0 - U_0) = \frac{3}{4\pi} \int \zeta' \left[1 + \frac{2}{3} e^2 + \frac{4}{3} q + \right. \\ \left. + \frac{e^2}{4} \sin^2 \Phi_0 + \left(\beta - \frac{23}{12} e^2 \right) \sin^2 \Phi - e^2 \frac{(\sin \Phi - \sin \Phi_0)^2}{12 \sin^2 \frac{\psi}{2}} \right] \frac{d\sigma}{2 \sin \frac{\psi}{2}} + \\ + \frac{a}{2\pi} \int \frac{g - \gamma_0}{\gamma_e} \left(1 + \frac{e^2}{4} \sin^2 \Phi_0 - \frac{3}{4} e^2 \sin^2 \Phi \right) \frac{d\sigma}{2 \sin \frac{\psi}{2}}. \quad (11) \end{aligned}$$

В равенстве

$$\zeta' = \zeta^S + \zeta \quad (12)$$

ζ^S определяется по формуле Стокса (5) и имеет порядок aa^2 , а ζ (поправка в ζ^S) имеет порядок aa^3 . Тогда, подставляя в уравнение (11) вместо ζ' выражение (12), нетрудно получить интегральное уравнение относительно ζ :

$$\zeta + \frac{2}{g_e} (W_0 - U_0) = \frac{3}{4\pi} \int \zeta \frac{d\sigma}{2 \sin \frac{\psi}{2}} + G, \quad (13)$$

где G — обозначение, принятое в формуле (1), которая является решением уравнения (13), в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

Отметим, что при выводе уравнения (13), малые величины порядка $\zeta \approx aa^3$, умноженные на β или на e^2 , или на q были отброшены как малые четвертого порядка. Учитывались же только малые величины третьего порядка.

Список литературы: 1. Загребин Д. В. Теория регуляризованного геоида. — Тр. ин-та теоретической астрономии АН СССР, 1952, вып. 1. 2. Загребин Д. В. О формуле Стокса для случая эллипсоидальной уровенной поверхности. — Научн. записки Львовского политехн. ин-та. Серия геодезическая, 1962, № 9. 3. Молоденский М. С. Решение задачи Стокса с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия Земли. — Тр./ЦНИИГАиК, 1956, вып. 112. 4. Молоденский М. С. Внешнее гравитационное поле и фигура физической поверхности Земли. — Изв. АН СССР. Серия географическая и геофизическая, 1948, № 3. 5. Монин И. Ф. Про визначення фігури геоїда з врахуванням величин третього порядку. — ДАН УРСР, 1965, № 5. 6. Монин И. Ф. К определению фигуры Земли с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия земного эллипсоида. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1962, вып. 4. 7. Монин И. Ф. Определение фигуры регуляризованного геоида с учетом третьего порядка. — Научн. записки Львовского политехн. ин-та. Серия геодезическая, 1962, № 9. 8. Poincaré H. Les mesures de Gravité et la Géodésie, Bull. Astr., t. 18, 1901. 9. Rudzki P. Sur la détermination de la figure de la Terre d'après les mesures de la Gravité, Bull. Astr., t. 22. 1905.

Работа поступила в редколлегию 31 октября 1977 года. Рекомендована кафедрой прикладной геодезии Львовского политехнического института.