

Д. Г. ВИЛЬНЕР

О НЕКОТОРЫХ АСПЕКТАХ ПРОБЛЕМЫ УЧЕТА МЕСТНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ВЕРТИКАЛЬНОЙ РЕФРАКЦИИ ПРИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОМ НИВЕЛИРОВАНИИ

Как указывалось в работе [2], применение на обширной территории Советского Севера и в некоторых других случаях метода, при котором на всех пунктах определенного участка принимался общий коэффициент рефракции, приводило к снижению точности отметок пунктов. В связи с этим были начаты поиски методов определения достаточно точного значения «местного» коэффициента рефракции для данного места и времени [3, 4].

Результаты выполненных на нашем предприятии в 1967—1969 гг. работ [1, 2], проверенные на производственных объектах обширной географической зоны (таежные и тундровые районы Западно-Сибирской низменности), показывают, что для аналитических засечек всех видов задача определения «местного» коэффициента вертикальной рефракции как при ручном, так и при машинном счете, решена удовлетворительно.

Ниже изложены теоретические основы и приведены результаты практической проверки другого метода, примененного в триангуляционных и полигонометрических сетях любой геометрической формы. Сущность его заключается в организации приблизительно в центре участка «службы рефракции», то есть перманентных наблюдений на избранном пункте триангуляции (центральной) зенитных расстояний на ряд смежных

пунктов, причем все эти пункты имеют отметки из геометрического нивелирования.

Наблюдения зенитных расстояний выполняются по специальной программе в течение всего периода полевых работ на данном участке ежедневно (при наличии видимости) в определенных интервалах времени суток. Обработка результатов наблюдений производится на ЭВМ с целью получения двух рядов значений коэффициента $C = \frac{1-k}{2R}$, отнесенных к средним

моментам наблюдений и редуцированных на начало каждого часа рабочего периода суток. Последние систематизируются в виде каталога коэффициента C «службы рефракции» данного участка на данный год и используются для вычисления превышений по зенитным расстояниям, измеренным в соответствующие моменты времени на всех пунктах в границах определенного участка.

Как метод редуцирования измеренных* коэффициентов C , так и вопрос оконтуривания участка, обслуживаемого с центрального пункта «службы рефракции» потребовали проведения специальных исследований, но прежде чем перейти к изложению их результатов, желательно сопоставить степень учета различных факторов при разных методах определения коэффициента рефракции и условия применения последних. При этом примем предложенное в работе [2] условное деление этих факторов на переменные во времени, в основном — метеорологические (факторы ФМ) и переменные в пространстве, в основном — топографические (факторы ФТ).

Из данных табл. 1 видно, какое место в производстве может и должен занять каждый из 7 рассмотренных методов учета влияния рефракции на результаты тригонометрического нивелирования. Например, первый метод, наиболее точный, неприемлем для производства из-за сложности организации и низкой производительности труда. Шестой метод (М. М. Извекова для сплошных сетей триангуляции), по-видимому, не имеет конкуренции при наличии необходимых условий (одновременность наблюдений на пункте, замкнутые фигуры сплошных направлений), однако он не может быть применен в сетях полигонометрии и при вставках пунктов в треугольники высшего класса, когда на исходных пунктах зенитные расстояния определяются только по направлениям на определяемые пункты. Это является основным аргументом при обосновании целесообразности применения седьмого метода, который уступает предыдущему и по затратам полезного труда и по точности.

Снижение точности последнего метода обусловлено двумя причинами:

* Здесь подразумевается определение значения C как функции непосредственно измеренного зенитного расстояния.

Т а б л и ц а 1
Сопоставление некоторых методов определения коэффициента рефракции

Название метода	Сущность метода	Степень учета факторов*		Дополнительные затраты	Условия для применения**	Преимущества и результаты
		ФМ	ФТ			
«Классический I (Использование тезиса постоянства k » на двух концах линии в один физический момент)	Одновременные прямые и обратные наблюдения зенитных расстояний	5,0	4,5	Радиосвязь, простой бригад в ожидании готовности к работе соседей при переездах	Симметрия ФТ. Синхронные наблюдения на обоих концах	Высокая точность результатов, сложная организация работ и низкая производительность труда
«Классический II (Использование результатов исследований на участках, типичных для целых географических районов, отдельно для летнего и зимнего периодов года)	Единый коэффициент рефракции для географических районов страны, в основном, для летнего периода года («табличный» коэффициент)	2,0	0,5	—	Строгое соблюдение определенных диапазонов времени наблюдения	Для средних условий умеренной зоны — результаты удовлетворительные. Для северных районов — не удовлетворительные
«Классический III (Использование отрезков из геометрического нивелирования для уточнения коэффициента рефракции)	Единый (средний для данного участка и данного сезона) коэффициент рефракции	3,0	2,0	Вычисление среднего коэффициента	То же	Результаты несколько лучше, чем при «классическом» II методе, для северных районов остаются не удовлетворительными

Геодезический I для односторонних направлений (М. М. Извеков в [4])	Вычисление местного коэффициента $f = \frac{2R}{1-k}$ для данной станции и времени наблюдения с уравниванием по способу наименьших квадратов	5,0	4,0	Вычисление местного коэффициента вручную (достаточно трудоемкое). Программы для вычислений на ЭВМ пока отсутствуют	1. Одновременность наблюдений на станции. 2. При обратных засечках необходимое различие в длине ходя бы одного направления	Высокая точность результатов во всех районах страны
Геодезический II для односторонних наблюдений (Д. Г. Вильнер в [1, 2])	Упрощенное вычисление коэффициента $C = \frac{2R}{1-k}$ для данной станции и времени	5,0	4,0	Никаких дополнительных затрат при вычислениях на ЭВМ по программе ВСО, незначительные — при ручном счете	То же	Практически та же точность, что при геодезическом I методе. Облегчен предварительный анализ исходных данных
Геодезический III для сплошных сетей триангуляции (М. М. Извеков в [3])	Вычисление местного коэффициента f для каждого пункта по способу наименьших квадратов	5,0	4,0	Трудоемкие вычисления коэффициента вручную. Программы для вычислений на ЭВМ пока отсутствуют	1. Одновременность наблюдений на пункте. 2. Замкнутые фигуры сплошных направлений	Высокая точность результатов во всех районах страны
Геодезический IV для сетей любого вида (описываемый в данной статье)	Определение каталога рабочих коэффициентов C по наблюдениям «службы рефракции»	4,0	3,0	Содержание сезонной службы рефракции и камерная обработка ее данных	Радиус действия до 100 км без резких различий в топографии местности	Достаточно высокая точность, в условиях, когда метод 6 не работает.

* По условной пятибальной системе.

** При любом методе подразумевается исключение направлений с особыми условиями прохождения луча.

а) редуцированием определенного непосредственно на центральном пункте коэффициента C (на начало интервала времени для получения каталожного значения C и на произвольный момент времени внутри интервала, соответствующий среднему моменту наблюдений на произвольном пункте участка);

б) распространением действия каталожных коэффициентов «службы рефракции» на площадь вокруг центрального пункта с радиусом $R < R_k$ (где R_k предстоит определить).

Для сведения до минимума потерь «а» проведено исследование с целью определения кривой интерполирования (редуцирования) коэффициента C . Пусть определенное на центральном пункте в день с номером i в интервале с номером j значение C_{ij} относится к среднему моменту фактических измерений зенитных расстояний T_{ij} , а соответствующее начало интервала — T_{ij}° , тогда, если суточный ход коэффициента C описывается функцией $C=f(T)$, то редуцирование значения C на начало i -го интервала означает определение величины

$$C_{ij}^{\circ}=f(T_{ij}+\Delta T), \quad (1)$$

где

$$\Delta T=T_{ij}^{\circ}-T_{ij} \quad (2)$$

и, кроме того, $\Delta T \leq 1$ ч.

Такое редуцирование применяется при вычислении значений C для каталога.

При обратном редуцировании каталожного значения C_{ij}° на произвольный момент T_k , получаем

$$C_{ik}=f(T_{ij}^{\circ}+\Delta T_k), \quad (1a)$$

где

$$\Delta T_k=T_{ik}-T_{ij}^{\circ} \quad (2a)$$

и, кроме того, $\Delta T_k \leq 1$ ч.

Редуцирование можно выполнять графически и аналитически с применением ЭВМ; на основании наших исследований представляется целесообразным в качестве функции $f(T)$ принять циклоиду, уравнение которой в параметрической форме, как известно, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} T=X &=rt-d \sin t; \\ C=Y &=r-d \cos t, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где r — радиус производящего круга; d — половина высоты арки циклоиды; t — угол поворота производящего круга.

Менее точной, но более простой для вычислений была бы функция $f(T)$ в виде эллипса, уравнение которого в параметрической форме имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} T=X &=a \cos t; \\ C=Y &=b \sin t. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

При достаточном количестве измерений на центральном пункте в данный день может оказаться полезным для лучшего подбора функции $f(T)$ параллельный сдвиг координатных осей, на величины X_0, Y_0 , то есть уравнения (3) и (4) приняли бы соответственно такой вид:

$$\left. \begin{aligned} T &= X = X_0 + rt - d \sin t; \\ C &= Y = Y_0 + r - d \cos t, \end{aligned} \right\} \quad (3a)$$

$$\left. \begin{aligned} T &= X = X_0 + a \cos t; \\ C &= Y = Y_0 + b \sin t. \end{aligned} \right\} \quad (4a)$$

Для начала исследования выполнены графическим путем *. Отложив по оси абсцисс значение времени суток (1 см = 1 ч), а по оси ординат — величины C (1 см = $1 \cdot 10^{-8}$), получили на прозрачной кальке по всем наблюдениям на всех станциях опытного участка ** графики суточного хода коэффициента C в виде ряда точек, соединенных дугами кривой и с разрывами в местах, где такие точки отсутствовали. В качестве величины C для каждого среднего момента наблюдений были взяты средние значения C для всех направлений данной серии. Затем поочередно накладывали основы графиков одна на другую, при этом добивались максимально возможного сближения или перекрытия участков отдельных суточных кривых, допуская параллельный сдвиг координатных осей. Совместив, таким образом, все наличные графики, получили наиболее вероятное расположение координатных осей и плавную усредненную кривую суточного хода коэффициента C («эталонную» кривую рефракции).

Относительно осей координат «эталонной» кривой параметры уравнений (3a) наилучшим образом к ней подобранной циклоиды равны $X_0 = +2.3$; $Y_0 = +1.0$; $2r = 2d = 6.7$. При этом «эталонная» кривая оказалась почти симметричной относительно оси симметрии циклоиды, совпадающей с осью $X = 13.0$, то есть с местным полднем (на оси времени откладывали поясное декретное время). В промежутке с 5 до 21 ч поясного времени совпадение циклоиды с «эталонной» кривой почти полное.

Отметим, что для редуцирования (графического или аналитического) коэффициента C нам необходимо иметь только радиус кривизны и его направление вблизи зафиксированных в данный день значений C , поэтому вопрос подбора функции для редуцирования коэффициентов можем считать решенным.

При исследовании потерь в точности группы «б» были изучены материалы упомянутого опытного участка и те производственные наблюдения, которые были проведены на близлежа-

* Над графиками работала студентка-дипломница Жернова Л. П.

** Полевые работы на опытном участке описаны в работе [7], камеральные — в [2].

щих к нему пунктах триангуляции в радиусе до 130 км в период действия его в качестве «службы рефракции» (июль 1967 г.). Район работ — тундровая часть Западной Сибири.

Основное содержание этой части исследований составило сопоставление местных коэффициентов $f_i = \frac{1-k_i^*}{2R}$, определенных методом М. М. Извекова на периферийных пунктах участка, в единицах C [2], с соответствующими по времени данными C_i , полученными путем описанного выше редуцирования на центральной станции службы рефракции. На этой основе мы попытались получить картину изменения величин

$$\Delta_i = C_i - f_i \quad (5)$$

в зависимости от удаления R_i периферийного пункта от центральной станции, достаточно ясную для оценки в первом приближении практической достоверности данных «службы рефракции» внутри определенного ареала.

Величины C и f обременены ошибками, пренебрегать которыми нельзя. Итак, по выполненным в нашем предприятии расчетам А. В. Сильванского и Л. П. Жерновой на 22 пунктах точность определения местного коэффициента f по методу М. М. Извекова (при сравнении с данными из геометрического нивелирования) оказалась равной для таежного участка $\pm 0,15$ при $n_{\text{ср}} = 4$, для тундровых участков — $\pm 0,19$ при $n_{\text{ср}} = 3$; где $n_{\text{ср}}$ — среднее количество треугольников в системах определения f . Таким образом, средняя квадратическая ошибка определения коэффициента f из одного треугольника, которую примем за среднюю квадратическую ошибку единицы веса, равна $(m_f)_I = \pm 0,15\sqrt{4} = \pm 0,30$ — для таежного участка и $(m_f)_{II} = \pm 0,19\sqrt{3} = \pm 0,33$ — для тундры, а в среднем $m_f = \pm 0,32$ (в единицах C).

При графическом исследовании положения «эталонной» кривой относительно отдельного показания C , полученного на центральной станции «службы рефракции», выяснилось, что среднее квадратическое отклонение такого значения C от кривой не превысит $m_C = \pm 0,36$ (в единицах C).

Вес редуцирования величины C принят равным количеству определений C в данные сутки, по которым установлено оптимальное положение «эталонной» кривой, поэтому m_C будет средней квадратической ошибкой единицы веса редуцированного значения C .

Поскольку сравнение соответствующих величин C и f предполагает получение и последующую обработку разностей (5), то, рассматривая каждую разность как функцию измеренных величин, средние квадратические ошибки которых равны со-

* Обозначения М. М. Извекова.

ответственно M_C и M_f , можем определить среднюю квадратическую ошибку функции

$$M_{\Delta}^2 = M_C^2 + M_f^2 = \frac{1}{P_C} \cdot m_C^2 + \frac{1}{P_f} \cdot m_f^2, \quad (6)$$

где P_C, P_f — веса величин C и f ; далее преобразуем (6) следующим образом:

$$M_{\Delta}^2 = m_C^2 \left(\frac{1}{P_C} + \frac{m_f^2}{m_C^2} \cdot \frac{1}{P_f} \right);$$

в нашем случае $m_C \approx m_f$, поэтому

$$M_{\Delta}^2 = m_C^2 \left(\frac{1}{P_C} + \frac{1}{P_f} \right). \quad (7)$$

Как известно,

$$\frac{1}{P_C} + \frac{1}{P_f} = \frac{1}{P_{\Delta}}, \quad (8)$$

следовательно,

$$M_{\Delta}^2 = m_C^2 \cdot \frac{1}{P_{\Delta}}. \quad (9)$$

Таким образом, $m_C = \pm 0,36$ является также средней квадратической ошибкой единицы веса разности Δ .

В табл. 2 разности Δ_i разделены в зависимости от расстояния до центрального пункта R_i на две группы: до 100 км и выше 100 км ($R_{\max} = 127$ км).

Средние разности $\Delta_{\text{ср}}$ получены в группах по формуле

$$\Delta_{\text{ср}} = \frac{\sum P_i \Delta_i}{\sum P_i}. \quad (10)$$

Для первой группы они равны: $\Delta_{\text{ср}} = 0,49$; при $M_{\Delta_{\text{ср}}} = \pm 0,064$; для второй группы — $\Delta_{\text{ср}} = 1,07$ при $M_{\Delta_{\text{ср}}} = \pm 0,075$. $M_{\Delta_{\text{ср}}}$ получено по формуле, являющейся следствием выражений (9) и (10):

$$M_{\Delta_{\text{ср}}} = \frac{m_C}{\sqrt{\sum P}}. \quad (11)$$

Приведенные результаты весьма красноречивы и вряд ли могли получиться случайно. При одинаковой точности определения в обеих группах величины $\Delta_{\text{ср}}$ сильно различаются: если расстояния от периферийных пунктов до центральной станции превышают 100 км (100—130), расхождения между коэффициентом C , определенным на станции, и таким же коэффициентом (f), определенным на периферийном пункте, в два раза

Распределение $\Delta = C - f$ по расстояниям

Группа 1 (до 100 км)										Группа 2 (100—130)					
Номер опр. пункта	P_f	Номер контр. пункта	P_c	R , км	$ \Delta $	P_Δ	$P_\Delta \cdot \Delta $	Номер опр. пункта	P_f	Номер контр. пункта	P_c	R , км	$ \Delta $	P_Δ	$P_\Delta \cdot \Delta $
18	3	3	2	21	00	1,2	0	127	2	2	8	106	0,3	1,6	0,48
75	6	1	7	55	0,4	3,2	1,28	122	9	3	2	106	0,4	1,6	0,64
62	3	1	7	55	0,2	2,1	0,42	120	7	4	2	112	0,5	1,6	0,80
75	6	3	8	63	0,2	3,4	0,68	96	5	2	8	113	0,3	3,1	0,93
62	3	3	5	63	0,2	1,9	0,38	123	3	1	3	105	0,9	1,5	1,35
33	6	4	2	66	0,4	1,5	0,60	105	8	1	3	127	0,8	2,2	1,76
136	5	1	3	70	0,2	1,9	0,32	121	2	3	9	114	1,4	1,6	2,24
61	5	3	8	71	0,5	3,1	1,55	101	3	4	6	117	1,2	2,0	2,40
141	3	1	3	79	0,3	1,5	1,45	101	3	1	6	117	2,6	2,0	3,20
57	3	4	8	83	0,4	2,2	0,88	99	3	1	3	120	1,1	1,5	1,65
138	2	3	4	88	0,4	1,3	0,52	120	7	1	3	120	1,6	2,1	3,36
80	1	2	8	61	1,0	0,9	0,90	127	1	2	5	106	2,4	0,8	0,92
61	5	1	7	62	0,9	2,9	2,61	121	1	2	3	112	2,3	1,2	2,76
136	5	4	2	62	0,9	1,4	1,26								
33	6	1	3	60	1,1	2,0	2,20								
57	3	1	4	75	0,9	1,7	1,53								
Σ						32,2	15,64	Σ						22,8	23,49

$$|\Delta|_{\text{ср}} = 0,49$$

$$\sqrt{\Sigma p} = \pm 5,6$$

$$M_{\Delta \text{ср}} = \frac{m_c}{\sqrt{\Sigma p}} = \pm 0,064$$

$$|\Delta|_{\text{ср}} = 1,07$$

$$\sqrt{\Sigma p} = \pm 4,8$$

$$M_{\Delta \text{ср}} = \frac{m_c}{\sqrt{\Sigma p}} = \pm 0,075$$

превышают расхождения при расстояниях до 100 км. Объяснить это явление в данном случае можно только изменением метеорологической обстановки при удалении от центральной станции более чем на 100 км.

Таким образом, трудно рассчитывать на радиус действия центральной станции в 100 км и более. В пределах же радиуса менее 100 км «служба рефракции» может быть полезной в тех случаях, когда ошибка $\pm 0,5$ м в отметке одинарного пункта (без уравнивания), обусловленная неточным определением коэффициента C , при геодезическом нивелировании по сторонам триангуляции длиной около 10 км, может быть терпимой.

В то же время, при наличии геодезического нивелирования в густой сети триангуляции со средней длиной стороны 5 км, ошибка в отметке одинарного пункта уменьшается в 4 раза и составляет $\pm 0,16$ м, а в результате уравнивания — примерно $\pm 0,10$ м; в такой сети, имея в центре «службу рефракции», можно было бы на участке с поперечником 150—200 км полностью исключить нивелировку четвертого класса и высотные ходы для обоснования съемки с сечением рельефа 2,5 м.

На основании сказанного выше можно сделать следующие выводы:

1. При отсутствии условий, необходимых для применения метода М. М. Извекова, например, в случае полигонометрических сетей, «служба рефракции» будет полезной для уточнения коэффициентов рефракции и повышения точности тригонометрического нивелирования. Это позволит сократить объемы геометрического нивелирования, что в заболоченных и залеженных районах даст ощутимый экономический эффект.

2. Связанная с применением «службы рефракции» точность редуцирования (интерполирования) значений C , определенных в данные сутки на центральном пункте, обеспечивает среднюю квадратическую ошибку единицы веса порядка $\pm 0,36$ м и ошибку рабочего значения редуцированного C $m_{C_i} = m_C \cdot \frac{1}{\sqrt{P_{C_i}}}$, где

P_{C_i} — вес C_i , равный количеству определений в данные сутки. При девяти определениях $m_C = 0,12$. Эти ошибки относятся к графическому способу редуцирования; при аналитическом методе, с применением ЭВМ, точность редуцирования безусловно повысится.

3. С удалением от центрального пункта больше чем на 100 км точность рабочего значения C уменьшается настолько, что ошибка в превышении при расстоянии 10 км составит больше 1 м, в пределах же 100 км эта ошибка уменьшается до 0,5 м, а при длине стороны 5 км и с учетом уравнивания ошибка в отметке пункта ожидается порядка 0,1 м. Такие отметки можно принять в качестве исходных для развития высотного обоснования съемок с сечением рельефа 2,5 м.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вильнер Д. Г. Вычисление высот опознаков на ЭВМ с учетом местного коэффициента рефракции. — «Геодезия и картография», 1970, № 1.
2. Вильнер Д. Г. Об определении коэффициента вертикальной рефракции для целей тригонометрического нивелирования. — «Геодезия и картография», 1972, № 4.
3. Извеков М. М. К вопросу о тригонометрическом нивелировании в сетях триангуляции. — «Геодезия и картография», 1966, № 12.
4. Извеков М. М. Учет коэффициента вертикальной рефракции по односторонним зенитным расстояниям. — «Геодезия и картография», 1967, № 9.
5. Изотов А. А., Пеллинен Л. П. Исследование земной рефракции и методов геодезического нивелирования. — «Труды ЦНИИГАиК», 1955, вып. 102.
6. Маслич Д. И. Некоторые общие закономерности влияния вертикальной рефракции на точность геодезического нивелирования. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1969, вып. 9.
7. Маслич Д. И., Петрашевич Г. Г. Суточные изменения рефракции в Заполярье. — «Геодезия и картография», 1969, № 9.

Работа поступила в редколлегию 14 июня
1974 года.