УДК 528.33.35

Ю. Н. КОРНИЦКИЙ

О ПРОДОЛЬНОМ И ПОПЕРЕЧНОМ СДВИГЕ ПУНКТОВ НЕСВОБОДНОГО ЛИНЕЙНО-УГЛОВОГО РЯДА ИЗ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ РОМБОВ

В несвободном ряду триангуляции из геодезических ромбов с измеренными углами и сторонами (рис. 1), возникает $3n$ условных уравнений фигур.

$$(8i-7)+(8i-6)+(8i-5)+(8i-4)+w=0, \tag{1}$$

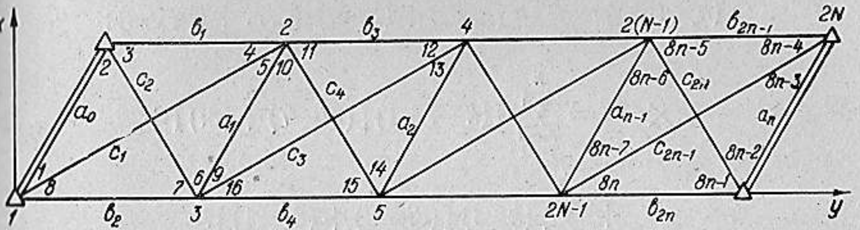

Схема линейно-углового ряда из геодезических ромбов, проложенного между исходными пунктами.

$6n$ условных уравнений сторон вида

$$(\lg b_{2i-1})-(\lg c_{2i-1})+\delta_{(8i-6)+(8i-5)}(8i-6)+$$
$$+\delta_{(8i-6)+(8i-5)}(8i-5)-\delta_{8i-7}(8i-7)+w=0, \tag{2}$$

условное уравнение дирекционных углов

$$\sum_{i=1}^{n}\{(8i-7)-(8i-3)\}+w_\alpha=0 \tag{3}$$

и координатные условные уравнения

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta X_{2i-1,2i}(\lg c_{2i-1})+\sum_{i=1}^{n-1}\Delta X_{2i,2i+1}(\lg a_i)-$$

$$-r\sum_{i=1}^{n}(Y_{2n}-Y_{2i-1})(8i-7)+r\sum_{i=1}^{n-1}(Y_{2n}-Y_{2i})(8i-3)+w_x=0; \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta Y_{2i-1,2i}(\lg c_{2i-1})+\sum_{i=1}^{n-1}\Delta Y_{2i,2i+1}(\lg a_i)\mp$$

$$+r\sum_{i=1}^{n}(X_{2n}-X_{2i-1})(8i-7)-r\sum_{i=1}^{n-1}(X_{2n}-X_{2i})(8i-3)+w_y=0, \quad (5)$$

где $(8i-7)$, $(8i-6),\ldots$, $(8i)$ — вероятнейшие поправки к измеренным углам; $(\lg a)$, $(\lg b),\ldots$ — вероятнейшие поправки к логарифмам длин измеренных сторон; δ — изменение логарифма синуса при изменении угла на $1''$; $r=2{,}1055$; i — порядковый номер ромба.

Весовые функции продольного и поперечного сдвигов пункта ряда с номером K запишем следующим образом:

$$(k\times 10^6\mu)\frac{dL}{L}=(\lg b_2)+(\lg b_4)+\ldots+(\lg b_{2n}); \quad (6)$$

$$k\times dT''=\sum_{i=1}^{k}\{(k-i+1)[(8i-7)+(8i)]+$$

$$+\sum_{i=1}^{k}(k-i)[(8i-2)+(8i-1)]. \quad (7)$$

Уравнивание выполняли по методу двух групп. В первую группу включали $2n$ условных уравнений фигур вида (1), во вторую — все остальные условные уравнения.

Веса принимали равными соответственно:

$$P_\beta=1; \quad P_{\mathrm{gl\,S}}=\frac{1}{q},$$

где $q=\left(\frac{10^6\mu\cdot m_S}{m_\beta\cdot S}\right)^2$.

При составлении таблицы коэффициентов условных уравнений второй группы было принято: $\delta_{30^\circ}=3\delta=3{,}66$; $\delta_{60^\circ}=\delta=1{,}22$; $\delta_{120^\circ}=-\delta=-1{,}22$.

Преобразованные коэффициенты условных уравнений второй группы вычисляли по известным формулам [1].

Правило образования коэффициентов нормальных уравнений легко усматривается на основании таблицы преобразованных коэффициентов за исключением некоторых, полученных следующим образом:

$$[ll]=0{,}75r^2\sum_{1}^{n}(n-i+1{,}5)^2+0{,}75r^2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i+1{,}5)^2+$$

$$+0{,}75q(2n-1)=0{,}75r^2\left[n^3-\frac{2n^2(n+1)}{2}+\right.$$

$$+3n^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{3n(n+1)}{2}+2{,}25n+n^3-\frac{2n^2(n+1)}{2}+$$

$$+\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}\Bigg]+0{,}75q(2n+1).$$

Выполнив приведение подобных, найдем

$$[ll]=0{,}75r^2n\left(\frac{2}{3}n^2+\frac{n}{2}+\frac{13}{12}\right). \tag{8}$$

Таким же образом были получены и остальные коэффициенты нормальных уравнений:

$$[jl]=-0{,}75r\frac{n(2n+1)}{2};\quad [jf_T]=0{,}25k(3k+1);$$

$$[f_Tf_T]=0{,}25k(2k^2+k+3). \tag{9}$$

Из решения системы нормальных уравнений были получены коэффициенты соответственной эквивалентной системы. Уравнения фигур независимы, поэтому $[a_ia_i\cdot(i-1)]=+2{,}0$. Для уравнений сторон получим

$$[b_1b_1\cdot n]=18\delta^2+q-4{,}5\delta^2=13{,}5\delta^2+q;$$

$$[b_ib_i\cdot(n+i-1)]_{i=2}^{n}=13{,}5\delta^2+2q=\eta;$$

$$[c_1c_1\cdot 2n]=\frac{(q+0{,}2\delta^2)(q+16{,}925\delta^2)}{q+13{,}5\delta^2};$$

$$[c_ic_i\cdot(2n+i-1)]_{i=2}^{n}=0{,}25\delta^2+1{,}5q=\nu; \tag{10}$$

$$[d_id_i\cdot(3n+i-1)]_{i=1}^{n-1}=\frac{8(q+15{,}5\delta^2)(3{,}93\delta^2+q)}{3\eta};$$

$$[e_1e_1\cdot 4n]=\frac{(q+20{,}352\delta^2)(q+0{,}6\delta^2)}{2(q+15{,}5\delta^2)}.$$

С достаточной для практических целей точностью можно принять

$$[e_1e_1\cdot 4n]=[e_ie_i\cdot(4n+i-1)]_{i=1}^{n-1}.$$

Квадратичные коэффициенты эквивалентной системы оставшихся условных уравнений сторон имеют сложный вид, и поскольку эти уравнения незначительно влияют на величины продольного и поперечного сдвига, они не приводятся.

Для условных уравнений дирекционных углов и координат соответственно имеем:

$$[jj\cdot 7n]=\frac{0{,}8q}{q+0{,}9\delta^2};$$

$$[ll\cdot(7n+1)]=\frac{0{,}75\delta^2(q+1{,}26\delta^2)(q-0{,}375\delta^2)}{q(q+2{,}25\delta^2)}\times\frac{n(2n-1)(n-1)}{6}+$$

$$+\frac{2\delta^2(6{,}31\delta^2+q)(q-0{,}225\delta^2)}{5(q+0{,}5\delta^2)(q+4{,}5\delta^2)}\times\frac{n(n-1)}{2}+$$

$$+\frac{0{,}75\delta^2 q(3\delta^2+q)}{(q+2{,}25\delta^2)(0{,}5\delta^2+q)}\times 2(n-1);\qquad(11)$$

$$[mm\cdot(7n+2)]=\frac{0{,}75(q-3{,}85\delta^2)(q-0{,}275\delta^2)}{q+6\delta^2}+$$

$$+\frac{(0{,}9\delta^2+q)(0{,}15\delta^2+q)(6{,}75\delta^2+q)}{6(2{,}25\delta^2+q)(4{,}5\delta^2+q)}\times n.$$

Продольный сдвиг. Условные уравнения фигур не влияют на величину обратного веса функции длины диагонали, так как

$$[a_i f_L\cdot(i-1)]_{i=1}^{n}=0. \qquad (12)$$

Для условных уравнений сторон и весовой функции длины диагонали неквадратичные коэффициенты эквивалентной системы будут следующие:

$$[b_i f_L\cdot(n+i-1)]_{i=1}^{k}=-q;\quad [b_i f_L\cdot(n+i-1)]_{i=k+1}^{n}=0;$$

$$[c_1 f_L\cdot(2n+i-1)]=\frac{6{,}15\delta^2 q}{13{,}5\delta^2+q};$$

$$[c_i f_L\cdot(2n+i-1)]_{i=2}^{k}=0{,}5q;\quad [c_i f_L\cdot(2n+i-1)]_{i=k+1}^{n}=0.$$

Переходя к суммарному влиянию этих уравнений на величину обратного веса и учитывая формулы (10), получим:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{[b_i f_L\cdot(n+i-1)]^2}{[b_i b_i\cdot(n+i-1)]}=-\frac{q^2}{\eta}\times k-\frac{q^3}{\eta(q+13{,}5\delta^2)};$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{[c_i f_L\cdot(2n+i-1)]^2}{[c_i c_i\cdot(2n+i-1)]}=-\frac{0{,}25q^2}{\nu}\times k+$$

$$+\frac{0,25q^2(q+33,2\delta^2)(q-2,7\delta^2)}{\nu(13,5\delta^2+q)(16,9\delta^2+q)};\qquad(13)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{[d_i f_L\cdot(3n+i-1)]^2}{[d_i d_i\cdot(3n+i-1)]}=-\frac{q^2(3,28\delta^2+q)}{6\eta(15,5\delta^2+q)}\times k+$$

$$+\frac{0,05q^2(q+33,2\delta^2)(q-2,7\delta^2)}{(13,5\delta^2+q)(16,9\delta^2+q)}.$$

Величины, вносимые в обратный вес условными уравнениями дирекционных углов и координат, определялись следующим образом:

$$[jf_L\cdot 7n]=\frac{0,8q}{q+0,9\delta^2}\times\frac{3\delta k}{4};\quad\frac{[jf_L\cdot 7n]^2}{[jj\cdot 7n]}=-\frac{0,67q}{q+0,9\delta^2}\times\frac{k^2}{n};$$

$$\frac{[lf_L\cdot(7n+1)]^2}{[ll\cdot(7n+1)]}=-\frac{0,307q}{q+1,885}\times\frac{k^2(n-k)^2}{n^2(n+1)}-$$

$$-\frac{0,425q(q-4,438)}{2q+20,093}\times\frac{k^2(5n-5k+2)}{n^2(n+1)};\qquad(14)$$

$$\frac{[mf_L\cdot(7n+2)]^2}{[mm\cdot(7n+2)]}=-\frac{0,189q(q+2,916\delta^2)}{q+1,268\delta^2}\times\frac{k^2}{n}.$$

Зная величины (9), (12), (13), (14), можно получить выражение для обратного веса функции длины диагонали, которое после ряда преобразований и упрощений приводится к виду

$$\frac{1}{P'_L}=\frac{0,189q(q+7,30)}{q+1,588}\times\frac{k(0,97n-k)}{n}-\frac{2,307q}{q+1,885}\times$$

$$\times\frac{k^2(n-k)^2}{n^2(n+1)}-\frac{0,425q(q-4,438)}{2q+20,093}\times\frac{k^2(5n-5k+2)}{n^2(n+1)}-$$

$$-\frac{0,225q(q-5,324)}{2q+20,093}\qquad(15)$$

где $\frac{1}{P'_L}=\left(\frac{10^6\mu k}{L}\right)^2\times\frac{1}{P_L}$.

Результаты проверки формулы (15) на теоретических моделях сведены в табл. 1.

Значения обратных весов $\frac{1}{P'_L}$

$\frac{m_s}{m_\beta S}$	n	k	$\frac{1}{P'_L}$ из схемы Гаусса	$\frac{1}{P'_L}$ по формуле (15)	Погрешность, %
1:100 000	3	1	1,592	1,458	8,4
	5	1	2,251	2,194	2,5
		2	3,362	3,407	1,3
		3	2,861	3,100	8,3
	8	2	4,881	4,902	0,4
		4	6,307	6,256	0,8
1:300 000	3	1	0,581	0,578	0,5
	5	1	0,705	0,712	1,0
		2	0,927	0,931	0,4
		3	0,908	0,906	0,2
	8	4	1,432	1,432	0
1:500 000	3	1	0,278	0,280	0,4
	5	1	0,332	0,344	3,6
		2	0,437	0,443	1,4
		3	0,436	0,434	0,5
	8	2	0,566	0,578	2,1
		4	0,668	0,671	0,4

Поперечный сдвиг. Неквадратичные коэффициенты уравнений фигур и весовой функции направления диагонали имеют следующий вид:

$$[a_i f_T \cdot (i-1)]_{i=1}^{k} = -(k-i+1); \quad [a_i f_T \cdot (i-1]_{i=k+1}^{n} = 0.$$

В случае условных уравнений сторон соответственно получим:

$$[b_i f_T \cdot (n+i-1)]_{i=1}^{k} = 1{,}5\delta(k-i+1); \quad [b_i f_T \cdot (n+i-1)]_{i=k+1}^{n} = 0;$$

$$[c_i f_T \cdot 2n] = \frac{0{,}5\delta(q-6{,}75\delta^2)}{13{,}5\delta^2+q} \times k;$$

$$[c_i f_T \cdot (2n+i-1)]_{i=2}^{k} = -0{,}25\delta(k-i+1).$$

Для остальных видов условных уравнений сторон с погрешностью не более 1—5% выполняются равенства:

$$[d_i f_T \cdot (3n+i-1)]_{i=1}^{k} = -2{,}0\delta(k-i+1);$$

$$[d_i f_T \cdot (3n+i-1)]_{i=k+1}^{n}=0; \quad [e_i f_T \cdot (4n+i-1)]=0;$$

$$[g_i f_T \cdot (5n+i-1)]=0; \quad [h_i f_T \cdot (5n+i-1)]=0.$$

Для неквадратичных коэффициентов условных уравнений дирекционных углов и координат выполняются соотношения:

$$[jf_T \cdot 7n]=-\frac{0{,}8q}{q+0{,}9\delta^2}\times\frac{k(2k-1)}{4};$$

$$[lf_T \cdot (7n+1)]=-\frac{0{,}886(q+0{,}068)}{q+1{,}637}\times$$

$$\times\frac{k}{2}\left[\frac{k(6n-4k+3}{3}-\frac{4n-9}{5}\right].$$

Таблица 2

Значения обратных весов $\frac{1}{P_T}$

$\frac{m_s}{m_\beta S}$	n	k	$\frac{1}{P_T}$ из схемы Гаусса	$\frac{1}{P_T}$ по формуле (16)	Погрешность, %
1:100 000	3	1	0,410	0,392	4,4
	5	1	0,517	0,441	14,7
		2	0,982	0,989	0,7
		3	1,034	1,096	6,0
	8	2	1,430	1,302	9,0
		4	2,930	2,820	3,8
1:300 000	3	1	0,226	0,225	0,4
	5	1	0,270	0,258	4,4
		2	0,583	0,616	5,7
		3	0,645	0,692	7,3
	8	2	0,901	0,819	9,1
		4	1,818	1,825	0,4
1:500 000	3	1	0,124	0,132	6,4
	5	1	0,146	0,151	3,4
		2	0,340	0,361	6,2
		3	0,381	0,404	6,0
	8	2	0,483	0,483	0
		4	1,080	1,068	1,1

Переходя к обратному весу функции направления диагонали и учитывая выражения для квадратичных коэффициентов эквивалентной системы, после ряда преобразований и упрощений получим

$$\frac{1}{P_T}=\frac{qk}{q+1{,}34}\times\left[0{,}044\,(6k^2-4k+9)-\frac{-k\,(2k-1)^2}{20n}\right]+$$

$$+\frac{0{,}25q^2}{(q+10{,}047)^2}-\frac{2{,}558\,(q+0{,}068)}{q+1{,}637}\times$$

$$\times\frac{k^2}{4n^2(n+1)}\left[\frac{k\,(6n-4k+3)}{3}-\frac{4n-9}{5}\right]^2. \qquad (16)$$

Величины $1/P_T$, вычисленные по формуле (16) и полученные из решения нормальных уравнений по схеме Гаусса, для разных значений n и q приведены в табл. 2.

Как видно из таблиц, значения обратных весов функций длины и направления диагонали определяются по формулам (15) и (16) с достаточной для практических целей точностью, поэтому они могут применяться при предрасчете точности несвободных рядов линейно-угловой триангуляции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Проворов К. Л. Точность цепи триангуляции с измеренными сторонами и углами. — «Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка», 1959, № 3.

Работа поступила в редколлегию 27 марта 1975 года. Рекомендована кафедрой инженерной геодезии Львовского политехнического института.