УДК 528.33.35

Ю. Н. КОРНИЦКИЙ

ВЛИЯНИЕ ОШИБОК ИСХОДНЫХ ДАННЫХ НА ТОЧНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ РЯДА ИЗ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ КВАДРАТОВ С ИЗМЕРЕННЫМИ УГЛАМИ И СТОРОНАМИ

В работах [1, 2] приведены формулы для вычисления обратных весов дирекционных углов диагонали квадрата с номером k и связующей стороны ряда с номером k, продольного и поперечного сдвигов k-й точки несвободного ряда из геодезических квадратов с измеренными сторонами и углами (рисунок)

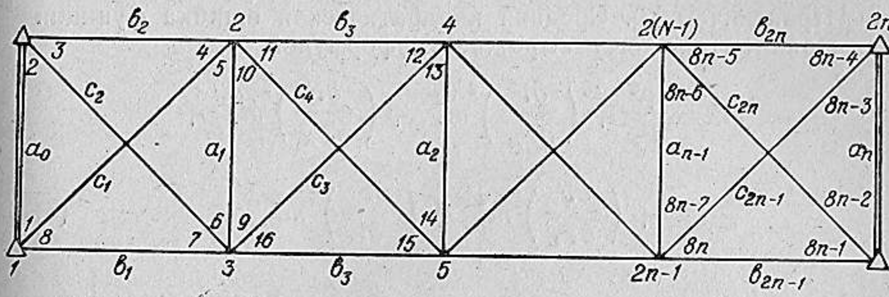

Схема несвободного линейно-углового ряда из геодезических квадратов.

$$\frac{1}{P_{\alpha_c}} = \frac{q}{q+2{,}226} \times \frac{(2k-1)(2n-2k+1)}{4n} - \frac{0{,}807q}{q+2{,}353} \times$$

$$\times \frac{(2k-1)^2(2n-2k+1)^2}{4n^2(n+1)}; \qquad (1)$$

$$\frac{1}{P_{\alpha_a}} = \frac{q}{q+2{,}226} \times \frac{k(n-k)}{n} - \frac{3{,}075q}{q+2{,}353} \times \frac{k^2(n-k)^2}{n^2(n+1)}; \qquad (2)$$

$$\frac{1}{P_{\text{т}}} = \frac{q}{q+2{,}226} \times \frac{k^3(4n-3k)}{12n} - \frac{0{,}855(q+0{,}037)}{q+2{,}226} \times$$

$$\times \frac{k^2(k+1)^2(4n-2k-1)^2}{27n^2(n+1)} + \frac{0{,}475q}{q+1{,}113} \times k; \qquad (3)$$

$$\frac{1}{P'_L} = \frac{q(q+12{,}305)}{6(q+2{,}226)} \times \frac{k(n-k)}{n} - \frac{q}{q+2{,}226} \times$$

$$\times \frac{3k^2(n-k)^2}{n^2(n+1)} - \frac{0{,}125q^3}{(q+3{,}339)(q+6{,}678)}. \qquad (4)$$

При выводе формул (1)—(4) исходные данные принимались безошибочными, а для того, чтобы правильно судить о характере распределения погрешностей в несвободных рядах, необходимо учитывать погрешности исходных данных.

Рассмотрим распределение ошибок перечисленных элементов линейно-углового ряда с учетом ошибок исходных данных по способу, предложенному советским геодезистом И. Ю. Пранис-Праневичем [3]. Средняя квадратическая ошибка функции по Пранис-Праневичу выражается формулой

$$m_F^2 = \frac{\mu^2}{P_F} + \left(\frac{\partial F}{\partial T_H}\right)^2 m_{T_H}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial T_K}\right)^2 m_{T_K}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial T_L}\right)^2 m_{T_L}^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)^2 m_L^2, \quad (5)$$

где μ — средняя квадратическая ошибка единицы веса; $\frac{1}{P_F}$ — обратный вес, вычисляемый по формулам (1)—(4); m_{T_H}, m_{T_K} — средние квадратические ошибки исходных дирекционных углов T_H и T_K; m_{T_L}, m_L — средние квадратические ошибки взаимного положения начального и конечного пунктов ряда;

$$\frac{\partial F}{\partial T_H} = \frac{\partial w_\alpha}{\partial T_H} Q_1 + \frac{\partial w_X}{\partial T_H} Q_2 + \frac{\partial w_Y}{\partial T_H} Q_3 + f_{T_H};$$

$$\frac{\partial F}{\partial T_K} = \frac{\partial w_\alpha}{\partial T_K} Q_1 + \frac{\partial w_X}{\partial T_K} Q_2 + \frac{\partial w_Y}{\partial T_K} Q_3 + f_{T_K} \text{ и т. д.} \quad (6)$$

— коэффициенты исследуемой функции.

Здесь $\frac{\partial w_\alpha}{\partial T_H}$, $\frac{\partial w_X}{\partial T_H}$, ... — частные производные от свободных членов по исходным данным; f_{T_H}, f_{T_K}, ... — частные производные от функции по исходным данным; Q_1, Q_2, Q_3 — переходные коэффициенты, которые определяются формулами:

$$Q_3 = -\frac{[mf\cdot(7n+2)]}{[mm\cdot(7n+2)]};$$

$$Q_2 = -\frac{[lf\cdot(7n+1)]}{[ll\cdot(7n+1)]} - \frac{[lm\cdot(7n+1]}{[ll\cdot(7n+1]} Q_3;$$

$$Q_1 = -\frac{[jf\cdot 7n]}{[jj\cdot 7n]} - \frac{[jl\cdot 7n]}{[jj\cdot 7n]} Q_2 - \frac{[jm\cdot 7n]}{[jj\cdot 7n]} Q_3.$$

Найдем частные производные от свободных членов по исходным данным. Поскольку

$$w_\alpha = T_H + \sum_{i=1}^{n} \{(8i-7)-(8i-3)\} - T_K;$$

$$w_X = \sum_{i=1}^{n} \Delta X_{2i-1,2i} + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta X_{2i,2i+1} - (X_K - X_H);$$

$$w_Y = \sum_{i=1}^{n} \Delta Y_{2i-1,2i} + \sum_{i=1}^{n} \Delta Y_{2i,2i+1} - (Y_K - Y_H),$$

получим:

$$\frac{\partial w_\alpha}{\partial T_H} = 1; \quad \frac{\partial w_\alpha}{\partial T_K} = \frac{\partial w_Y}{\partial L} = -1; \quad \frac{\partial w_X}{\partial T_H} = -L; \quad \frac{\partial w_X}{\partial T_L} = L;$$

$$\frac{\partial w_Y}{\partial T_H} = \frac{L}{n}; \quad \frac{\partial w_\alpha}{\partial T_L} = \frac{\partial w_\alpha}{\partial L} = \frac{\partial w_X}{\partial T_K} = \frac{\partial w_Y}{\partial T_K} = \frac{\partial w_Y}{\partial T_L} = 0.$$

Средняя квадратическая ошибка дирекционного угла диагонали квадрата с номером K

Частные производные функции будут: $f_{T_H} = 1$, $f_{T_K} = f_{T_L} = f_L = 0$.

Для определения переходных коэффициентов из [1] и [2] имеем:

$$-\frac{[mf_{\alpha_c} \cdot (7n+2)]}{[mm \cdot (7n+2)]} = -\frac{[lm \cdot (7n+1)]}{[ll \cdot (7n+1)]} = 0;$$

$$-\frac{[lf_{\alpha_c} \cdot (7n+1)]}{[ll \cdot (7n+1)]} = \frac{2(2k-1)(2n-2k+1)}{3n(n+1)} \times \frac{1}{L};$$

$$-\frac{[jf_{\alpha_c} \cdot 7n]}{[jj \cdot 7n]} = -\frac{2k-1}{2n}; \quad -\frac{[jl \cdot 7n]}{[jj \cdot 7n]} = 1{,}053L;$$

$$-\frac{[jm \cdot 7n]}{[jj \cdot 7n]} = -1{,}053\frac{L}{n}.$$

Следовательно,

$$Q_3 = 0; \quad Q_2 = \frac{2(2k-1)(2n-2k+1)}{3n^2(n+1)} \times \frac{n}{L};$$

$$Q_1 = -\frac{2k-1}{2} + \frac{2{,}106(2k-1)(2n-2k+1)}{3n(n+1)}.$$

Подставив полученные величины в выражения (6), а затем в (5), получим выражение для средней квадратической ошибки функции дирекционного угла диагонали квадрата с номером k:

$$m_{\alpha_c}^2=\frac{\mu^2}{P_{\alpha_c}}+\frac{(2n-2k+1)^2}{4n^2}\left[1+\frac{0{,}211(2k-1)}{3(n+1)}\right]^2 m_{T_H}+$$

$$+\frac{(2k-1)^2}{4n^2}\left[1-\frac{4{,}211(2n-2k+1)}{3(n+1)}\right]^2 m_{T_K}^2+$$

$$+\frac{4(2k-1)^2(2n-2k+1)^2}{9n^2(n+1)^2}m_{T_L}^2. \qquad (7)$$

Средняя квадратическая ошибка дирекционного угла связующей стороны ряда.

Частные производные от функции будут: $f_{T_H}=1$, $f_{T_K}=f_{T_L}=$ $=f_L=0$, а переходные коэффициенты

$$Q_3=0;\quad Q_2=\frac{3k(n-k)}{n^2(n+1)}\times\frac{L}{n};\quad Q_3=-\frac{k}{n}+\frac{3{,}158k(n-k)}{n(n+1)}.$$

По аналогии с формулой (7) получим:

$$m_{\alpha_a}^2=\frac{\mu^2}{P_{\alpha_a}}+\frac{(n-k)^2}{n^2}\left[1+\frac{0{,}16k}{n+1}\right]^2 m_{T_H}^2+$$

$$+\frac{k^2}{n^2}\left[1-\frac{3{,}158(n-k)}{n+1}\right]^2 m_{T_K}^2+\frac{9k^2(n-k)^2}{n^2(n+1)^2}m_{T_L}^2. \qquad (8)$$

Средняя квадратическая ошибка направления диагонали ряда

Частные производные от функции равны: $f_{T_H}=k$, $f_{T_K}=f_{T_L}=$ $=f_L=0$.

Переходные коэффициенты для данного случая

$$Q_3=0;\quad Q_2=\frac{8k(k+1)(4n-2k-1)}{27n^2(n+1)}\times\frac{n}{L};$$

$$Q_1=-\frac{k^2}{2n}+\frac{8{,}422k(k+1)(4n-2k-1)}{27n(n+1)}.$$

Следовательно,

$$m_T^2=\frac{\mu^2}{P_T}+\left[\frac{k(2n-k)}{2n}+0{,}422B\right]^2 m_{T_H}^2+$$

$$+\left(\frac{k^2}{2n}-8{,}422B\right)^2 m_{T_K}^2+64B^2m_{T_L}^2, \qquad (9)$$

где $B=\dfrac{k(k+1)(4n-2k+1)}{27n(n+1)}$

Средний квадратический продольный сдвиг

Частные производные от функции длины диагонали по исходным данным будут равны: $f_{T_H}=f_{T_K}=f_{T_L}=0$, $f_L=k/n$.

Для переходных коэффициентов получим следующие выражения:

$$Q_3=-\frac{k}{L};\quad Q_2=\frac{3k(n-k)}{n(n+1)}\times\frac{1}{L};$$

$$Q_1=\frac{3{,}159k(n-k)}{n(n+1)}.$$

После подстановки полученных выражений в формулы (6), (5) и ряда преобразований найдем

$$m_L^2=\frac{\mu^2}{P_L}+\left(0{,}053D-\frac{k}{n}\right)^2 m_{T_H}^2+D^2(m_{T_L}^2+1{,}113m_{T_K}^2)+$$

$$+k^2\frac{m_L^2}{L}(10^6M)^2, \qquad (10)$$

где $D=\frac{3k(n-k)}{n(n+1)}$.

Анализ формул (7)—(10) показывает, что ошибки исходных данных могут значительно менять характер распределения погрешностей в несвободных рядах из геодезических квадратов с измеренными углами и сторонами.

Для примера были вычислены средние квадратические ошибки m'_{α_c} уравненных дирекционных углов диагоналей квадратов без учета ошибок исходных данных и их полные средние квадратические ошибки m'_{α_c} для ряда из пяти геодезических квадратов:

K	m'_{α_c}	m'_{α_c}
1	$\pm 0'',41$	$+0'',65$
2	$+0'',49$	$+0'',77$
3	$+0'',47$	$+0'',78$
4	$+0'',49$	$+0'',70$
5	$+0'',41$	$+0'',58$

При этом принимали: $\mu=1''$, $q=2{,}097$, $m_{T_H}=m_{T_K}=0'',5$, $m_{T_L}=1''$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корницкий Ю. Н. Оценка точности элементов линейно-углового ряда, состоящего из геодезических квадратов, проложенного между исходными пунктами. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1974, вып. 19.

2. Корницкий Ю. Н. О продольном и поперечном сдвиге линейно-углового ряда из геодезических квадратов, проложенного между исходными пунктами. — «Геодезия, картография и аэрофотосъемка», 1974, вып. 20.

3. Пранис-Праневич И. Ю. Определение средней квадратической ошибки функции с учетом ошибок исходных данных при уравнивании по способу наименьших квадратов. — «Исследования по геодезии ЦНИИГАиК», 1939, № 5.

Работа поступила в редколлегию 27 марта 1975 года. Рекомендована кафедрой инженерной геодезии Львовского политехнического ин-та.