ББК 26.1
Г35
УДК 528

Геодезия, картография и аэрофотосъемка, вып. 38. Респ. межвед. науч.-техн. сборник. — Львов: Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1983. — 160 с.

В сборнике опубликованы результаты новых исследований в теории и методах геодезической астрономии и гравиметрии, теории фигуры Земли, линейно-угловой триангуляции, трилатерации, а также в области изучения и учета земной и астрономической рефракции, освещены исследования в инженерной геодезии, фотограмметрии и аэрофотогеодезии.

Для преподавателей, научных работников, аспирантов и студентов геодезического профиля, работников геодезических и картографических учреждений.

Библиогр. списки в конце статей.

Ответственный за выпуск доц., канд. техн. наук
И. Н. Гудз

Адрес редакционной коллегии:
290646, Львов-13, ул. Мира, 12,

Львовский ордена Ленина политехнический институт
им. Ленинского комсомола,
геодезический факультет, тел. 79-78-32

Редакция научно-технической литературы
Зав. редакцией М. П. Парцей

Г $\frac{1902020000\text{-}072}{М225(04)\text{-}83}$ 483-83

УДК 518.21

В. А. АНТОНОВ, К. В. ХОЛШЕВНИКОВ

К НОРМИРОВКЕ МАКСВЕЛЛОВА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ШАРОВЫХ ФУНКЦИЙ

Так называемое максвеллово представление шаровых функций, исследованное в прошлом веке Сильвестром, долгое время было забыто. Однако в последние годы к нему обращаются вновь в связи с практическими задачами геодезии и геофизики планет. Преимущества максвеллова представления общего члена разложения геопотенциала в ряд Лапласа выявляются при постановке следующих вопросов: 1) преобразование потенциала к другим координатным осям [5] и 2) оценка максимумов и минимумов сферической функции [6].

По поводу первого вопроса следует сказать, что общие формулы прямого преобразования сферических гармоник при произвольном вращении часто встречаются как в математической [4], так и в физической [3] литературе, однако из-за своей громоздкости остаются без практического употребления. Особенно неудобными они становятся при сравнении многих координатных систем для одного и того же потенциала. Поэтому понятны те надежды [5], которые связываются с косвенным методом соответствующего преобразования через максвеллово представление сферической функции (само оно очень легко преобразуется к другим осям).

Что касается второго вопроса, то в [6] показана простая связь между моментом мультиполя и чебышевской нормой сферических функций порядков $n=0, 1, 2$. Здесь мы покажем близость момента к чебышевской норме, а также к эвклидовой, помноженной на $\sqrt{2n+1}$, для произвольного индекса n. Оценка нормы необходима для правильного подбора масштабов при программировании операций преобразования сферических гармоник к разным осям, а также при сравнительном анализе вклада разных гармоник в аномалии силы тяжести, ундуляции геоида и т. п.

1. Каждая сферическая функция с точностью до постоянного множителя может быть, согласно Максвеллу и Сильвестру, представлена в виде

$$Y_n(Q) = Y_n(\theta, \psi) = r^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial h_1\, \partial h_2, \cdots \partial h_n} \left(\frac{1}{r}\right). \tag{1}$$

Здесь h_m означает луч, который в прямоугольных координатах задается направляющими косинусами α_m, β_m, γ_m так, что

$$\frac{\partial}{\partial h_m} = \alpha_m \frac{\partial}{\partial x} + \beta_m \frac{\partial}{\partial y} + \gamma_m \frac{\partial}{\partial z}, \ (m = 1, \cdots n), \tag{2}$$

причем

$$\alpha_m^2 + \beta_m^2 + \gamma_m^2 = 1. \tag{3}$$

Докажем, что заданная согласно (1) функция Y_n удовлетворяет неравенствам

$$\| Y_n \| \leqslant \frac{n!}{\sqrt{2n+1}}; \quad (4) \qquad \| Y_n \|_c \leqslant n!, \tag{5}$$

где введены эвклидова и чебышевская нормы

$$\| Y_n \| = \left(\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\sigma} [Y_n(Q)]^2 \, d\sigma \right)^{1/2};$$

$$\| Y_n \|_c = \max_{\sigma} |Y_n(Q)|,$$

σ — единичная сфера.

Равенство в (4) и (5) очевидно для $Y_0 = 1$, $Y_1 = -\cos(\widehat{h_1, OQ})$. Предположим правильность (4) для функции Y_{n-1} ($n \geqslant 2$). Всегда можно пользоваться системой координат, в которой $\frac{\partial}{\partial h_n} = \frac{\partial}{\partial z}$. Тогда

$$Y_n = r^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} (r^{-n} Y_{n-1}), \tag{6}$$

или

$$Y_n = -\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + n\cos\theta\right) Y_{n-1}. \tag{7}$$

Функции Y_{n-1} и Y_n можно разложить по стандартным гармоникам

$$Y_{n-1}(\theta, \psi) = a_0 P_{n-1}(\cos\theta) + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos k\psi + b_k \sin k\psi) P_{n-1}^k(\cos\theta);$$

$$Y_n(\theta, \psi) = A_0 P_n(\cos\theta) + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos k\psi + B_k \sin k\psi) P_n^k(\cos\theta). \tag{8}$$

Поскольку оператор в правой части (7) не затрагивает переменной ψ, он задает почленное соответствие между обеими суммами (8). В частности, $A_n = B_n = 0$. Множители пропорциональности между остальными коэффициентами можно определить хотя бы по известному рекуррентному соотношению для присоединенных функций Лежандра [1]

$$(n-k) P_n^k(\cos\theta) = \left(\sin\frac{\partial}{\partial\theta} + n\cos\theta\right) P_{n-1}^k(\cos\theta).$$

Поэтому

$$A_k = -(n-k) a_k, \quad B_k = -(n-k) b_k \quad (k = 0, 1, \ldots n).$$

Норму Y_n оцениваем, пользуясь свойством ортогональности отдельных членов (8)

$$\frac{\| Y_n \|^2}{\| Y_{n-1} \|^2} = \frac{2n-1}{2n+1} \, \frac{2n^2 a_0^2 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{(n+k-1)!}{(n-k-1)!} (n^2 - k^2)(a_k^2) + b_k^2)}{2a_0^2 + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{(n+k-1)!}{(n-k-1)!} (a_k^2 + b_k^2)} \leqslant n^2 \frac{2n-1}{2n+1},$$

откуда и следует (4) для очередного значения n, причем точное равенство теряется, кроме случая $a_k = b_k = 0$ ($k \geqslant 1$).

Оценка (5) вытекает из (4) по общему соотношению для норм [8]. Равенство в (4) и (5), как ясно из предыдущих указаний, достигается только для зональной гармоники с произвольной осью. Тогда в (1) все операторы $\frac{\partial}{\partial h_m}$ идентичны с точностью до знака.

2. Попытаемся при $n \geqslant 1$ получить оценку по-иному. В цилиндрических координатах

$$\frac{\partial}{\partial x} \pm i \frac{\partial}{\partial y} = e^{\pm i\psi} \left(\frac{\partial}{\partial R} \pm \frac{i}{R} \frac{\partial}{\partial \psi} \right). \tag{9}$$

Обозначим $\widetilde{Y}_n$ секториальную часть Y_n, т. е. последний член второй из сумм (8), представленный также линейной комбинацией $e^{in\psi}$ и $e^{-in\psi}$. Преобразовав (2) к виду

$$\frac{\partial}{\partial h_m} = \frac{1}{2}(\alpha_m - i\beta_m)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}(\alpha_m + i\beta_m)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) + \gamma_m \frac{\partial}{\partial z},$$

убеждаемся на основании (9), что

$$\widetilde{Y}_n(Q) = r^{n+1} \left\{ \prod_{m=1}^{n} \left(\frac{\alpha_m - i\beta_m}{2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n + \prod_{m=1}^{n} \left(\frac{\alpha_m + i\beta_m}{2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \right\} \left(\frac{1}{r} \right).$$

При повороте системы координат вокруг оси z произведение $(\alpha_m + i\beta_m)$ остается постоянным по модулю, а при определенном угле поворота становится вещественным. В последнем случае, обозначая

$$G=\prod_{m=1}^{n}\left|\frac{\alpha_m+i\beta_m}{2}\right|, \tag{10}$$

получаем

$$\tilde{Y}_n=2Gr^{n+1}\operatorname{Re}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)^n\left(\frac{1}{r}\right)\right\}=$$

$$=2G(-1)^n(2n-1)!!\operatorname{Re}\frac{(x+iy)^n}{r^n}=2G(-1)^n(2n-1)!!\sin^n\theta\cos n\psi,$$

откуда

$$\|\tilde{Y}_n\|=G\sqrt{\frac{2(2n)!}{2n+1}};\quad \|\tilde{Y}_n\|_c=2G(2n-1)!! \tag{11}$$

Согласно неравенству Бернштейна [2], прибавление младших гармоник может лишь увеличить чебышевскую норму функции $A_n\cos n\psi+B_n\sin n\psi$. Зависимость ее коэффициентов от 0 вывода не меняет. Увеличение евклидовой нормы $\tilde{Y}_n$ от прибавления младших гармоник очевидно. Итак, получаем искомые неравенства

$$\|Y_n\|\geqslant G\sqrt{\frac{2(2n)!}{2n+1}}; \quad (12) \quad \|Y_n\|_c\geqslant 2G(2n-1)!!. \tag{13}$$

Если все оси $h_1,\ldots,h_n$ лежат в одной плоскости, то можно направить ось z нормально к ней и в силу $\alpha_m^2+\beta_m^2=1$ получить

$$G=2^{-n}. \tag{14}$$

Это верно, в частности, для секториальных гармоник, для которых в (12), (13), как и в (11), следует оставить знак равенства.

В других случаях неравенство строгое. Надо еще оценить снизу G, или

$$\ln G=\sum_{m=1}^{n}\ln\frac{\sin\theta_m}{2}, \tag{15}$$

где через θ_m обозначен угол между осями h_m и z. Воспользуемся произвольностью выбора последней. Существует такое направление оси z, при котором $\ln G$ больше своего среднего значения по всевозможным положениям Северного полюса

$$\ln G\geqslant \mathrm{E}\ln G=n\,\mathrm{E}\ln\frac{\sin\theta}{2}=\frac{n}{2}\int_0^{\pi}\sin\theta\ln\frac{\sin\theta}{2}\,d\theta=-n.$$

Итак, в (12), (13) всегда осуществляется строгое неравенство при подстановке

$$G=e^{-n}. \tag{16}$$

3. Применим полученные результаты к максвелловому способу задания произвольной сферической функции

$$Y_n(Q)=(-1)^n M\frac{r^{n+1}}{n!}\frac{\partial^n}{\partial h_1\cdots\partial h_n}\left(\frac{1}{r}\right), \tag{17}$$

где M — момент; $h_1,\ldots,h_n$ — оси мультиполя, порождающего данную Y_n. Формулы (4), (5), (12), (13) позволяют оценить момент мультиполя через нормы сферической функции (17)

$$\|Y_n\|\leqslant\frac{M}{\sqrt{2n+1}}\leqslant\frac{\|Y_n\|}{2^nG}\sqrt{\frac{(2n)!!}{2(2n-1)!!}}; \tag{18}$$

$$\|Y_n\|_c\leqslant M\leqslant\frac{\|Y_n\|_c}{2^nG}\cdot\frac{(2n)!!}{2(2n-1)!!}. \tag{19}$$

Формула Валлиса [7, с. 263]

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\sqrt{\frac{\pi(2n+\theta_n)}{2}},\quad (0<\theta_n<1)$$

позволяет заменить коэффициенты при $\|Y_n\|/2^nG$, $\|Y_n\|_c/2^nG$ соответственно на

$$\sqrt[4]{\frac{\pi}{8}}(2n+1)^{3/4}$$

и квадрат этой величины. Прежние соглашения о величине G и знаках равенства остаются в силе.

4. Запишем точные оценки для начальных функций (1). При $n=0, 1, 2$ прямые вычисления дают

$$\|Y_0\|=1,\quad \|Y_1\|=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \|Y_2\|=\sqrt{\frac{3+\cos^2\varphi}{5}};$$

$$\|Y_0\|_c=1,\quad \|Y_1\|_c=1,\quad \|Y_2\|_c=\frac{1}{2}(3+|\cos\varphi|), \tag{20}$$

где φ — угол между осями h_1, h_2. При варьировании φ получаются неравенства

$$\sqrt{3/5}\leqslant\|Y_2\|\leqslant\sqrt{4/5};\quad 3/2\leqslant\|Y_2\|_c\leqslant 2. \tag{21}$$

Как и должно быть, верхние оценки совпадают с (4), (5), нижние — с (12), (13) при $G=2^{-n}$, ибо две оси всегда лежат в одной плоскости. Верхние оценки достигаются для зональной, нижние — для секториальной гармоники.

Перейдем к Y_3. Обозначим

$$Z=\frac{\partial^2}{\partial h_2\,\partial h_3}\frac{1}{r},$$

поэтому $Y_3=r^4\partial Z/\partial h_1$. Выберем за оси x, y биссектрисы углов, образованных осями h_2, h_3. Очевидно, Z — четная функция координат. Поэтому частные производные от Z по x, y, z ортогональны на сфере, так что

$$\|Y_3\|^2 = \alpha_1^2 \left\|\frac{\partial Z}{\partial x}\right\|^2 + \beta_1^2 \left\|\frac{\partial Z}{\partial y}\right\|^2 + \gamma_1^2 \left\|\frac{\partial Z}{\partial z}\right\|^2. \tag{22}$$

Квадратичная форма (22) относительно α_1^2, β_1^2, γ_1^2 при условии (3) обращается в минимум, когда две из трех величин α_1^2, β_1^2, γ_1^2 обращаются в нуль, а третья — в единицу. Поэтому h_3 или ортогональна к h_1, h_2, или компланарна с ними. В первом случае фиксируем h_1, h_3 и варьируем h_2, которая опять-таки должна оказаться или ортогональной к h_1, h_3, или компланарной с ними.

Итак, минимум $\|Y_3\|$ сообщает или триортогональная, или компланарная тройка осей. В первом случае, выбирая h_1, h_2, h_3 за оси координат, получаем

$$Y_3 = -15\frac{xyz}{r^3} \tag{23}$$

и прямой подсчет дает $\|Y_3\| = \sqrt{15/7}$. Во втором случае норма больше, так как согласно (12), (14) $\|Y_3\| \geqslant \sqrt{45/14}$.

Окончательно

$$\|Y_3\| \geqslant \sqrt{\frac{15}{7}}. \tag{24}$$

Перейдем к оценке равномерной нормы. Отождествляя направления h_k и точку Q единичной сферы с соответствующими ортами $\mathbf{h}_k$, $\mathbf{r}$, получим

$$\frac{1}{3} Y_3(Q) = -5(\mathbf{h}_1\mathbf{r})(\mathbf{h}_2\mathbf{r})(\mathbf{h}_3\mathbf{r}) + (\mathbf{h}_2\mathbf{h}_3)(\mathbf{h}_1\mathbf{r}) + (\mathbf{h}_3\mathbf{h}_1)\times$$
$$\times(\mathbf{h}_2\mathbf{r}) + (\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2)(\mathbf{h}_3\mathbf{r}).$$

Обозначим $\mathbf{h}_2\mathbf{h}_3 = \alpha$, $\mathbf{h}_3\mathbf{h}_1 = \beta$, $\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2 = \gamma$, $\delta = \alpha+\beta+\gamma$ и вычислим значение Y_3 в точке Q_0, отвечающей орту

$$\mathbf{r} = (3+2\delta)^{-1/2}(\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2 + \mathbf{h}_3):$$

$$-\frac{1}{3} Y_3(Q_0) = (3+2\delta)^{-3/2}\,[5 + 7\delta + 3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + 5(\alpha\beta +$$
$$+\beta\gamma + \gamma\alpha) + (\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \gamma^2\beta + \beta^2\alpha) - 2\alpha\beta\gamma]. \tag{25}$$

Предположим вначале неотрицательность чисел α, β, γ, а значит, и δ. Пронумеруем оси так, чтобы α стало наибольшим из чисел α, β, γ. Тогда $2\alpha\beta\gamma \leqslant \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma$. Поэтому

$$-\frac{1}{3} Y_3(Q_0) \geqslant \left(5 + 7\delta + \frac{5}{2}\delta^2\right)(3+2\delta)^{-3/2}. \tag{26}$$

С правой стороны стоит возрастающая функция от δ, так что

$$-\frac{1}{3} Y_3(Q_0) \geqslant \frac{5}{3\sqrt{3}}. \tag{27}$$

Пусть теперь изменением направлений каких-либо из осей h_k на противоположные невозможно добиться неотрицательности α, β, γ. Тогда можно выбрать направления осей так, чтобы два из трех чисел α, β, γ были положительны, а третье отрицательно и чтобы их сумма $\delta \geqslant 0$. Представляя выражение в квадратных скобках (25) в форме

$$5 + 7\delta + \frac{5}{2}\delta^2 + \frac{1}{3}\delta^3 + \left[\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) - \frac{1}{3}(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)\right] - 4\alpha\beta\gamma,$$

опять убеждаемся в справедливости (26), а значит и (27).

Итак,

$$\|Y_3\|_c \geqslant 5/\sqrt{3}, \tag{28}$$

причем равенство по-прежнему достигается только для гармоники с тремя ортогональными осями в определяемой ими системе отсчета, имеющей вид (23).

Список литературы: 1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1965. 2. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций. — М.; Л.; ОНТИ—ГТТИ, 1934. 3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Курс теоретической физики. — М.: Наука, 1978, т. 4, ч. 1. 4. *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее приложение к физике. — М.: Физматиз, 1958. 5. *Марченко А. Н.* Преобразование стоксовых постоянных при вращении координатной системы. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1977, № 26. 6. *Мещеряков Г. А., Марченко А. Н.* Об экстремальных свойствах сферических функций, описывающих внешний гравитационный потенциал Земли. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1978, вып. 27. 7. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. — М.; Л.: Наука, 1949. 8. *Antonov V. A., Kholchevnikov K. V.* Die multidimensionale Ungleichung von Bernstein und die Abschätzung der Ableitungen des Gravitationspotentials. — Astronomische Nachrichten, 1978, Bd. 299, N 3.

Статья поступила в редколлегию 21.04.82

УДК 528.35

В. А. ВИЛЕНСКИЙ

УЧЕТ СООТНОШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ И ИСХОДНЫХ АЗИМУТОВ ПРИ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ЦЕПИ ТРИЛАТЕРАЦИИ

На практике априорная оценка точности геодезических сетей часто выполняется с помощью формул, полученных для некоторых идеальных моделей. Однако реальные сети всегда в той или иной степени отличаются от этих моделей. Поэтому возникает необходимость усовершенствования имеющихся интерполяционных формул и получение новых, позволяющих учитывать степень этого отличия.