

динат. Поэтому частные производные от Z по x, y, z ортогональны на сфере, так что

$$\|Y_3\|^2 = \alpha_1^2 \left\| \frac{\partial Z}{\partial x} \right\|^2 + \beta_1^2 \left\| \frac{\partial Z}{\partial y} \right\|^2 + \gamma_1^2 \left\| \frac{\partial Z}{\partial z} \right\|^2. \quad (22)$$

Квадратичная форма (22) относительно $\alpha_1^2, \beta_1^2, \gamma_1^2$ при условии (3) обращается в минимум, когда две из трех величин $\alpha_1^2, \beta_1^2, \gamma_1^2$ обращаются в нуль, а третья — в единицу. Поэтому h_3 или ортогональна к h_1, h_2 , или компланарна с ними. В первом случае фиксируем h_1, h_3 и варьируем h_2 , которая опять-таки должна оканчиваться или ортогональной к h_1, h_3 , или компланарной с ними.

Итак, минимум $\|Y_3\|$ сообщает или триортогональная, или компланарная тройка осей. В первом случае, выбирая h_1, h_2, h_3 за оси координат, получаем

$$Y_3 = -15 \frac{xyz}{r^3} \quad (23)$$

и прямой подсчет дает $\|Y_3\| = \sqrt{15/7}$. Во втором случае норма больше, так как согласно (12), (14) $\|Y_3\| \geq \sqrt{45/14}$.

Окончательно

$$\|Y_3\| \geq \sqrt{\frac{15}{7}}. \quad (24)$$

Перейдем к оценке равномерной нормы. отождествляя направления h_k и точку Q единичной сферы с соответствующими ортами h_k, r , получим

$$\frac{1}{3} Y_3(Q) = -5(h_1 r)(h_2 r)(h_3 r) + (h_2 h_3)(h_1 r) + (h_3 h_1) \times \\ \times (h_2 r) + (h_1 h_2)(h_3 r).$$

Обозначим $h_2 h_3 = \alpha, h_3 h_1 = \beta, h_1 h_2 = \gamma, \delta = \alpha + \beta + \gamma$ и вычислим значение Y_3 в точке Q_0 , отвечающей орту

$$r = (3 + 2\delta)^{-1/2} (h_1 + h_2 + h_3):$$

$$-\frac{1}{3} Y_3(Q_0) = (3 + 2\delta)^{-3/2} [5 + 7\delta + 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + 5(\alpha\beta + \\ + \beta\gamma + \gamma\alpha) + (\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \gamma^2\beta + \beta^2\alpha) - 2\alpha\beta\gamma]. \quad (25)$$

Предположим вначале неотрицательность чисел α, β, γ , а значит, и δ . Пронумеруем оси так, чтобы α стало наибольшим из чисел α, β, γ . Тогда $2\alpha\beta\gamma \leq \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma$. Поэтому

$$-\frac{1}{3} Y_3(Q_0) \geq (5 + 7\delta + \frac{5}{2}\delta^2)(3 + 2\delta)^{-3/2}. \quad (26)$$

С правой стороны стоит возрастающая функция от δ , так что

$$-\frac{1}{3} Y_3(Q_0) \geq \frac{5}{3\sqrt{3}}. \quad (27)$$

Пусть теперь изменением направлений каких-либо из осей h_k на противоположные невозможно добиться неотрицательности α, β, γ . Тогда можно выбрать направления осей так, чтобы два из трех чисел α, β, γ были положительны, а третье отрицательно и чтобы их сумма $\delta \geq 0$. Представляя выражение в квадратных скобках (25) в форме

$$5 + 7\delta + \frac{5}{2}\delta^2 + \frac{1}{3}\delta^3 + \left[\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \frac{1}{3}(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) \right] - 4\alpha\beta\gamma,$$

опять убеждаемся в справедливости (26), а значит и (27).

Итак,

$$\|Y_3\|_c \geq 5/\sqrt{3}, \quad (28)$$

причем равенство по-прежнему достигается только для гармоник с тремя ортогональными осями в определяемой ими системе отсчета, имеющей вид (23).

Список литературы: 1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1965. 2. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. — М.; Л.: ОНТИ—ГТТИ, 1934. 3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. — М.: Наука, 1978, т. 4, ч. 1. 4. Любарский Г. Я. Теория групп и ее приложение к физике. — М.: Физматиз, 1958. 5. Марченко А. Н. Преобразование стоковых постоянных при вращении координатной системы. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1977, № 26. 6. Мещеряков Г. А., Марченко А. Н. Об экстремальных свойствах сферических функций, описывающих внешний гравитационный потенциал Земли. — Геодезия, картография и аэрофотосъемка, 1978, вып. 27. 7. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. — М.; Л.: Наука, 1949. 8. Antonov V. A., Kholchevnikov K. V. Die multidimensionale Ungleichung von Bernstein und die Abschätzung der Ableitungen des Gravitationspotentials. — Astronomische Nachrichten, 1978, Bd. 299, N 3.

Статья поступила в редколлегию 21.04.82

УДК 528.35

В. А. ВИЛЕНСКИЙ

УЧЕТ СООТНОШЕНИЯ ТОЧНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ И ИСХОДНЫХ АЗИМУТОВ ПРИ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ЦЕПИ ТРИЛАТЕРАЦИИ

На практике априорная оценка точности геодезических сетей часто выполняется с помощью формул, полученных для некоторых идеальных моделей. Однако реальные сети всегда в той или иной степени отличаются от этих моделей. Поэтому возникает необходимость усовершенствования имеющихся интерполяционных формул и получение новых, позволяющих учитывать степень этого отличия.

В настоящей работе исследуется возможность учета соотношения точности линейных измерений и точности определения азимута стороны a_n в цепи трилатерации из геодезических прямоугольников, изображенных на рисунке.

Впервые формулы априорной оценки точности цепи трилатерации, изображенной на рисунке, были получены И. А. Кузузовым [3]. Аппроксимируя обратные веса на ЭВМ, Г. С. Бронштейн и

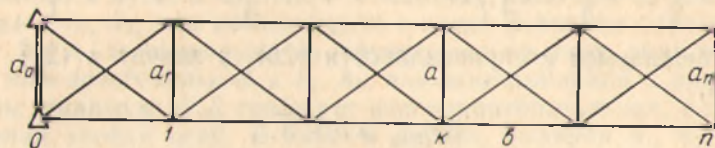


Схема цепи трилатерации.

А. С. Сафонов [2] получили более простые формулы оценки точности продольного сдвига

$$m_l = m_a \cdot (0,980 - 0,0381 l) \cdot \sqrt{n}, \quad (1)$$

поперечного сдвига

$$m_u = m_a \cdot (0,191 + 0,782/n + 0,806 \ln \sqrt{n}), \quad (2)$$

среднюю квадратическую погрешность дирекционного угла стороны

$$m'_a = \frac{m_a}{a} \cdot \rho'' \cdot \sqrt{2k}. \quad (3)$$

У. П. Аркашова [1] получила формулы для оценки точности того же ряда, но при условии, что он уравнен за условие азимутов (за твердые приняты азимуты сторон a_0 и a_n). Для продольного и поперечного сдвигов аппроксимация результатов, полученных в [1] и выполненная в [2], приводит к формулам: продольный сдвиг ряда

$$m_l = m_a (0,688 - 0,576 l) \sqrt{n}; \quad (4)$$

поперечный сдвиг ряда

$$m_u = m_a (0,743 - 0,0174 \cdot n + 0,410 \ln \sqrt{n}); \quad (5)$$

погрешность азимута связующей стороны четырехугольника с номером

$$m_a = \frac{m_a}{a} \cdot \rho'' \sqrt{2k \left(1 - \frac{k}{n}\right)}. \quad (6)$$

В приведенных формулах $l = \frac{b}{a}$ — продвиг прямоугольников;

m_a — средняя квадратическая ошибка единицы веса; n — число фигур в ряде.

Согласно [2] средняя квадратическая погрешность формул (1), (2), (4), (5) составляет 5%.

Приведенные выше формулы соответствуют идеальным моделям. В частности, формулы (1) — (3) соответствуют свободной цепи трилатерации, а формулы (4) — (6) — несвободной сети, в которой известны азимуты сторон a_0 и a_n .

Возникает вопрос, при каком соотношении точности измерения линий и точности определения азимута стороны a_n можно считать, что сеть свободная или несвободная и при предрасчете точности пользоваться соответственно формулами (1) — (3) либо (4) — (6), и вообще, как видоизменяются формулы (1) — (3) для произвольного соотношения точности азимутальных и линейных измерений?

Определим сначала, насколько точнее будет известно положение пунктов и сторон в цепи трилатерации, изображенной на рис. 1, в которой дополнительно определен азимут стороны a_{12} . Для этого вычтем из уравнений (1) — (3) соответственно уравнения (4) — (6):

$$\Delta_l = m_a \cdot (0,292 + 0,195 l) \sqrt{n}; \quad (7)$$

$$\Delta_u = m_a \cdot (-0,552 + 0,782/n + 0,0174 n + 0,396 \ln \sqrt{n}); \quad (8)$$

$$\Delta_a = \frac{m_a}{a} \cdot \rho'' \cdot \left(\sqrt{2k} - \sqrt{2k \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right)} \right). \quad (9)$$

Для сетей, в которых точность исходных азимутов и линейных измерений примерно одного порядка, можно записать

$$m_F = m_F^{\text{несв}} + r_F(t_a/t_a, l), \quad (10)$$

здесь $1/t_a = m_a/\rho''$ — относительная погрешность определения азимута; $1/t_a = m_a/a$ — относительная погрешность линейных измерений; r_F — функции, зависящие от соотношения точности азимутальных определений и линейных измерений и от продвига l .

Настоящие исследования сводятся, по существу, к определению вида функций r_F и, как следствие, определению таких значений l , при которых сеть можно считать соответственно свободной ($r=1$) и несвободной ($r=0$).

Положим, что в цепи трилатерации (рисунок), состоящей из двенадцати фигур геодезических прямоугольников с продвигом $l=0,6, 0,8, \dots, 1,4$, стороны измеряются с ошибкой m_a , а азимут стороны a_{12} — с ошибкой m'_a . Для определения вида искомых функций нами была произведена сплошная оценка точности целого ряда сетей с различным соотношением точности линейных и азимутальных определений. В настоящем эксперименте с различными длинами сторон a ($a=0,2$ км, $0,5$ км, $1,0$ км, $1,5$ км) и для всех указанных выше значений продвига l производилась сплошная оценка точности для случаев, когда $m'_a = 0'', 1'', 2'', 4'', 6'', 8''$. Все необходимые вычисления выполнялись с помощью составленной нами на языке Фортран-4 программы «СЕТКА», которая

предназначена для уравнивания и оценки точности плановых геодезических сетей. Вычисления производились на ЭВМ ЕС-1022.

После выполнения сплошной оценки точности указанных выше сетей на основании (10) были определены значения искомых функций r_F в зависимости от величин t_α/t_a и l

$$r_F = (m_F - m_F^{\text{несв.}})/\Delta_F. \quad (11)$$

Здесь величины m_F находят в результате оценки точности исследуемых сетей на ЭВМ, а величины $m_F^{\text{несв.}}$ и Δ_F нетрудно определить по формулам (4)–(6), (7)–(9). Частично результаты этих вычислений приведены в табл. 1.

Из таблицы видно, что искомые функции в большей степени зависят от величины t_α/t_a и в меньшей от l . При этом, если в

Таблица 1

Значения функции r_F				
t_α/t_a	$l=0,8$	$l=1,0$	$l=1,2$	$l=1,4$
Продольный сдвиг: $r_l = r_l(t_\alpha/t_a, l)$				
2,063	0,36	0,36	0,36	0,36
1,031	0,70	0,74	0,76	0,77
0,688	0,96	0,98	1,00	1,00
0,516	1,00	1,00	1,00	1,00
Поперечный сдвиг: $r_u = r_u(t_\alpha/t_a, l)$				
2,063	0,07	0,09	0,10	0,11
1,031	0,29	0,35	0,39	0,39
0,688	0,58	0,67	0,73	0,77
0,516	0,82	0,90	0,94	0,97
0,342	1,00	1,00	1,00	1,00
$r_\alpha = r_\alpha(t_\alpha/t_a, l)$				
2,063	0,08	0,09	0,09	0,11
1,031	0,27	0,32	0,36	0,39
0,688	0,55	0,63	0,69	0,79
0,516	0,79	0,87	0,92	0,94
0,342	1,00	1,00	1,00	1,00

рассматриваемой сети $t_\alpha/t_a \geq 2$, то можно считать, что азимут стороны a_n измерен безошибочно, и для априорной оценки точности таких сетей можно использовать формулы (4)–(6). Если

$t_\alpha/t_a \leq \frac{1}{2}$, то рассматриваемую сеть можно считать свободной, и

для априорной оценки точности такой сети можно использовать формулы (1)–(3). Наконец, при $\frac{1}{2} < t_\alpha/t_a < 2$ удалось эмпирически определить вид искомых функций (12)–(14)

$$r_l = 1/(0,9 - 0,3l + t_\alpha/t_a)^2 + 0,33; \quad (12)$$

$$r_u = 1/(0,9 - 0,3l + t_\alpha/t_a)^2; \quad (13)$$

$$r_\alpha = 1/(0,9 - 0,3l + t_\alpha/t_a)^2. \quad (14)$$

Подставляя значения функций (12)–(14), (7)–(9) и (4)–(6) в (10), найдем искомые формулы

$$m_{t_n} = m_{t_n}^{\text{несв.}} + r_l \Delta_l; \quad (15)$$

$$m_{u_n} = m_{u_n}^{\text{несв.}} + r_u \Delta_u; \quad (16)$$

$$m_{\alpha_n} = m_{\alpha_n}^{\text{несв.}} + r_\alpha \Delta_\alpha. \quad (17)$$

Таблица 2

Результаты проверки формул (15) — (17)

l	a [км]	μ°	$1/P_{a_n}$		$\Delta\%$	$1/P_{t_{12}}$		$\Delta\%$	$1/P_{u_{12}}$		$\Delta\%$
			строг. реш.	по фор- муле (17)		строг. реш.	по фор- муле (15)		строг. реш.	по фор- муле (16)	
0,8	0,5	2	10,43	10,65	2	2,60	2,71	4	15,1	15,8	4
		4	11,25	11,57	3	2,97	2,95	1	18,0	18,7	3
	1,0	2	5,62	5,78	3	2,97	2,95	1	18,0	18,7	33
		4	6,72	6,20	8	3,34	3,33	0	24,8	23,5	1
	1,5	2	4,14	4,14	0	3,25	3,25	0	21,7	21,3	2
		4	4,76	4,76	0	3,08	3,08	0	27,2	27,1	0
1,0	0,5	2	10,49	10,69	2	2,57	2,69	5	19,0	19,8	4
		4	11,45	11,69	2	2,98	2,93	1	23,2	23,7	2
	1,0	2	5,73	5,85	1	2,98	2,95	1	23,2	23,7	2
		4	6,83	6,73	2	3,26	3,26	0	32,1	30,5	5
	1,2	2	10,53	10,73	2	2,53	2,66	5	23,0	24,4	6
		4	11,61	11,78	2	2,97	2,94	1	28,6	30,1	5
1,0	2	2	5,80	5,89	2	2,97	2,94	1	28,6	30,1	5
		4	6,97	6,94	0	3,19	3,24	2	39,3	41,5	6

Проверка формул выполнялась путем сравнения значений m , вычисленных строго на ЭВМ и найденных с помощью формул (15)–(17). Результаты этой проверки приведены в табл. 2.

Согласно данным табл. 2, погрешность полученных формул в исследуемом диапазоне величин l и t_α/t_a не превышает 8%.

Список литературы: 1. Аркашова У. П. Оценка точности рядов прямоугольников с измерительными сторонами и диагоналями. — Науч. тр. Омск. с.-х. ин-та, 1970, т. 68, № 2. 2. Бронштейн Г. С., Сафонов А. С. Аппроксимация формул для оценки точности рядов трилатерации. — Геодезия и картография, 1974, № 1. 3. Кузнецов И. А. Накопление погрешностей в рядах триангуляции с измеренными сторонами. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1965, вып. 5.

Статья поступила в редколлегию 13.01.82