УДК 528

Міщенко І., Зуска А.
Національний гірничий університет (м. Дніпропетровськ, Україна)

ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ АПРОКСИМУЮЧИХ ПОЛІНОМІВ ПРИ ТРАНСФОРМУВАННІ ЗНІМКІВ

Статья анализирует эффективность использования степенных полиномов при преобразовании снимков. Предложен алгоритм априорного анализа результатов апроксимации.

This paper is analyzed of efficiency of use power polynomial at conversion pictures. The algorithm of a priori analysis of result's approximation is proposed.

В багатьох комплексах комп'ютерних програм для перетворення знімка до системи координат даної карти використовують різноманітні методи апроксимації, не враховуючи при цьому геометричні особливості побудови зображення.

В даній роботі розглядається ефективність заміни формул проективного перетворення поліномами n-х ступенів.

Для цієї мети строгі формули аналітичного трансформування знімка були розкладені в ряд Тейлора, не накладаючи обмежень на значення кутів нахилу знімка:

$$\left.\begin{aligned} x^0 - x &= C_{x0} + C_{x1}x + C_{x2}y + C_{x3}x^2 + C_{x4}xy + C_{x5}y^2 + C_{x6}x^2y + C_{x7}xy^2 + C_{x8}x^3 + ... \\ y^0 - y &= C_{y_0} + C_{y_1}x + C_{y_2}y + C_{y_3}x^2 + C_{y_4}xy + C_{y_5}y^2 + C_{y_6}x^2y + C_{y_7}xy^2 + C_{y_8}x^3 + ... \end{aligned}\right\}, \quad (1)$$

де x^0, y^0 - трансформовані координати точок знімка; x, y - виміряні координати точок на похилому знімку; C_{x_i}, C_{y_i} - коефіцієнти поліномів. Вирази для коефіцієнтів C_{x_i} приведені в таблиці 1. Дані вирази є справедливими при любих значеннях кутів нахилу знімка. При $\alpha_0 \le 3^0$ поліноми (1) після деяких перегрупувань перетворюються в відомі ряди: формули трансформування для планових знімків (Лобанов А.Н., 1984).

В таблиці 2 наведені значення кожного члена полінома при фокусних відстанях $f = 70, 100, 200, 350, 500$ мм і значення кутів $\alpha = \nu = \text{æ} = 0^o30', 1, 2, 3^o$.

Відповідно даних таблиці 2 при $f \le 100$мм трансформування знімків може здійснюватися за поліномом другого ступеня при кутах нахилу до 1^o включно. В цьому випадку залишкові члени третього ступеня будуть порядку 20-10 мкм.

При кутах нахилу 2-3° для трансформування необхідно використовувати поліном третього ступеня (члени третього ступеня досягають 190-94 мкм).

При $f \geq 200$мм і кутах нахилу $\leq 3^{\circ}$ трансформування за поліномом другого ступеня призведе до максимальних залишкових похибок 23 мкм ($\alpha=3^{\circ}$) і 0,6 мкм ($\alpha=30'$).

Таблиця 1

Коефіцієнти C_{xi}

C_{xi}	*Аналітичні вирази*	C_{xi}	*Аналітичні вирази*
C_{xo}	$-{fa_3}/{c_3}$	C_{x5}	$\frac{1}{f} \cdot \frac{C_{x2}}{c_3} \cdot c_2$
C_{x1}	$\frac{a_1c_3 - a_3c_1}{c_3^2}$	C_{x6}	$\frac{1}{f^2} \cdot \left[\frac{2 \cdot C_{x1}}{c_3^2} \cdot c_2 + \frac{C_{x2}}{c_3^2} \cdot c_1 \right]$
C_{x2}	$\frac{a_2c_3 - a_3c_2}{c_3^2}$	C_{x7}	$\frac{1}{f^2} \cdot \left[\frac{2 \cdot C_{x2}}{c_3^2} \cdot c_1 + \frac{C_{x1}}{c_3^2} \cdot c_2 \right]$
C_{x3}	$\frac{1}{f} \cdot \frac{C_{x1}}{c_3} \cdot c_1$	C_{x8}	$\frac{1}{f^2} \cdot \frac{C_{x1}}{c_3^2} \cdot c_1^2$
C_{x4}	$\frac{1}{f} \cdot \left[\frac{C_{x1}}{c_3} \cdot c_2 + \frac{C_{x2}}{c_3} \cdot c_1 \right]$	C_{x9}	$\frac{1}{f^2} \cdot \frac{C_{x2}}{c_3^2} \cdot c_2^2$

Таблиця 2

Значення членів полінома, мм ,x=y=70мм

f, мм	C_{x0}	$C_{x1}x$	$C_{x2}y$	$C_{x3}x^2$	$C_{x4}xy$	$C_{x5}y^2$	$C_{x7}xy^2$	$C_{x8}x^3$
при α=w=æ=0°30								
70	0,6108	0,0053	0,6109	0,6160	0,60	0,0053	0,0053	0,0053
100	0,8727	0,0053	0,6109	0,4313	0,4201	0,0037	0,0026	0,0026
200	1,7453	0,0053	0,6109	0,2156	0,2101	0,0019	0,0006	0,0006
350	3,0543	0,0053	0,6109	0,1232	0,1200	0,0011	0,0002	0,0002
500	4,3633	0,0053	0,6109	0,0863	0,0840	0,0007	0,0001	0,0001
при α=w=æ=1°								
70	1,2217	0,0174	1,2218	1,2428	1,2437	0,0210	0,0213	0,0213
100	1,7453	0,0174	1,2218	0,8710	0,8704	0,0148	0,0104	0,0104
200	3,4906	0,0174	1,2218	0,4355	0,4351	0,0074	0,0026	0,0026
350	6,1086	0,0174	1,2218	0,2486	0,2486	0,0043	0,0008	0,0008
500	8,7266	0,0174	1,2218	0,1742	0,1740	0,0030	0,0004	0,0004
при α=w=æ=2°								
70	2,4435	0,0853	2,4435	2,5263	2,2729	0,0853	0,0853	0,0853
100	3,4907	0,0853	2,4435	1,7689	1,5910	0,0597	0,0418	0,0418
200	6,9813	0,0853	2,4435	0,8848	0,7955	0,0298	0,0104	0,0104
350	12,2173	0,0853	2,4435	0,5056	0,4546	0,0170	0,0034	0,0034
500	17,4533	0,0853	2,4435	0,3540	0,3182	0,0119	0,0017	0,0017
при α=w=æ=3°								
70	3,6652	0,1919	3,6652	3,8516	3,2814	0,1919	0,1919	0,1919
100	5,2360	0,1919	3,6652	2,6973	2,2970	0,1343	0,0940	0,0940
200	10,4720	0,1919	3,6652	1,3439	1,1485	0,6717	0,0235	0,0235
350	18,3260	0,1919	3,6652	0,7712	0,6563	0,0384	0,0077	0,0077
500	26,1799	0,1919	3,6652	0,5399	0,4594	0,0269	0,0038	0,0038

При розв'язку задачі апроксимації значення коефіцієнтів поліномів будуть мати спотворення, які обумовлені залишковими членами.

Розглянемо можливості апріорного аналізу впливу залишкових членів поліному на результати апроксимації.

В основу математичної моделі дослідження покладені рівняння:

$$\left(A_\zeta \cdot L\right)\delta C + A_{p\zeta} \cdot \left(a^3 \cdot C_p\right) = V \qquad (2)$$

Для наочності пояснення структур матриць, які входять до рівняння (2) припустимо, що:

- для апроксимації використовується поліном 2-го ступеня;
- залишковий член поліному включає в себе члени 3-го ступеня.

В цьому випадку

$$A_\zeta = \begin{bmatrix} 1 & \zeta_1 & \eta_1 & \zeta_1^2 & \zeta_1\eta_1 & \eta_1^2 \\ 1 & \zeta_2 & \eta_2 & \zeta_2^2 & \zeta_2\eta_2 & \eta_2^2 \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 1 & \zeta_n & \eta_n & \zeta_n^2 & \zeta_n\eta_n & \eta_n^2 \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

де $\zeta_i = \frac{x_i}{a}$; $\eta_i = \frac{y_i}{a}$, x_i, y_i - координати точок на знімку, $2a \times 2a$ - розмір знімку або розмір площі апроксимації, L - діагональна матриця, елементами якої є елементи вектора

$$L_a = \begin{bmatrix} 1 & a & a & a^2 & a^2 & a^2 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

$\delta C = \left[\delta C_0 \delta C_1 \delta C_2 \delta C_3 \dots \delta C_5\right]^T$ - вектор спотворень шуканих коефіцієнтів, обумовлений залишковим членом поліному.

$$A_{p\zeta} = \begin{bmatrix} \zeta_1^2\eta_1 & \zeta_1\eta_1^2 & \zeta_1^3 & \eta_1^3 \\ \zeta_2^2\eta_2 & \zeta_2\eta_2^2 & \zeta_2^3 & \eta_2^3 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ \zeta_n^2\eta_n & \zeta_n\eta_n^2 & \zeta_n^3 & \eta_n^3 \end{bmatrix}, \qquad (5)$$

$C_p = \left[C_6\, C_7\, C_8\, C_9\right]^T$ - вектор коефіцієнтів при членах 3-го ступеня.

Фактично $A_{p\zeta} \cdot \left(a^3 \cdot C_p\right)$ є матриця-стовпчик значень залишкових членів поліному на n точках знімку.

При розв'язку задачі апроксимації за методом найменших квадратів

$$\delta C = -L^{-1}\left(A_\zeta^T A_\zeta\right)^{-1} A_\zeta^T A_{p\zeta} \cdot \left(a^3 \cdot C_p\right) \qquad (6)$$

Для точки знімка з координатами x = y = a

$$a^3 \cdot C_p = \begin{bmatrix} C_6 x^2 y \\ C_7 x y^2 \\ C_8 x^3 \\ C_9 y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_6 \\ \Delta_7 \\ \Delta_8 \\ \Delta_9 \end{bmatrix} = \Delta_p, \qquad (7)$$

де вектор Δ_p вектор залишкових членів 3-го ступеня для точки з координатами x = y = a .

З урахуванням (7) вектор спотворень δC можна представити у вигляді функції вектора Δ_p

$$\delta C = -L^{-1}\left(A_\zeta^T \cdot A_\zeta\right)^{-1} A_\zeta^T\left(A_{p\zeta}\right) \cdot \Delta p \qquad (8)$$

Аналогічна задача була розв'язана (Міщенко І.І., 1996) при аналізі спотворень елементів зовнішнього орієнтування знімка під впливом систематичних похибок знімка.

З практичної точки зору для задач апроксимації виявляються цікавими величини, які характеризують ступінь „поглинання" апроксимуючим поліномом залишкових членів. Ці дані представляє вектор

$$\Delta P = -\left(A_\zeta Q_\zeta A_\zeta^T\right) A_{p\zeta} \cdot \Delta_p,$$

де $Q_\zeta = \left(A_\zeta^T \cdot A_\zeta\right)^{-1}$.

З точки зору методу найменших квадратів вектор ΔP є вектором систематичних спотворень функції врівноважених величин. В нашому випадку у ролі функції виступає апроксимуючий поліном 2-го ступеня.

В виразі (9) добуток

$$\mathrm{A}_\zeta \mathrm{Q}_\zeta \mathrm{A}_\zeta^T = \mathrm{K} \qquad 10)$$

є нормованою коваріаційною матрицею функції врівноважених величин (Міщенко І.І., 2000), яка характеризує вплив випадкових похибок вихідної інформації на точність апроксимації.

В свою чергу, матриця

$$\mathrm{G}_p = \left(\mathrm{A}_\zeta \mathrm{Q}_\zeta \mathrm{A}_\zeta^T\right) \cdot \mathrm{A}_{p\zeta} \qquad (11)$$

характеризує ефективність врахування поліномом 2-го ступеня систематичних спотворень (у нашому випадку членів 3-го ступеня). Так, відповідно (9) та (7), елемент $\mathrm{G}_{p(il)}$ показує, яка частина залишкового члена Δ_6 буде поглинатися поліномом 2-го ступеня на *i*-тій точці знімка.

Результативність апроксимації характеризує вектор залишкових похибок

$$\mathrm{V} = \left|\mathrm{E} - \left(\mathrm{A}_\zeta \mathrm{Q}_\zeta \mathrm{A}_\zeta^T\right)\right| \mathrm{A}_{p\zeta} \cdot \Delta_p\,. \qquad (12)$$

При цьому елементи матриці

$$\mathrm{V1} = \left|\mathrm{E} - \left(\mathrm{A}_\zeta \mathrm{Q}_\zeta \mathrm{A}_\zeta^T\right)\right| \mathrm{A}_{p\zeta} \qquad (13)$$

показують, яка доля Δ_i залишається на відповідній точці знімка.

Таким чином, матриця V1 дає можливість апріорі проаналізувати доцільність використання поліному даного ступеня. Вираз (13) є справедливим для любого ступеня поліному, змінюється тільки структура матриці A_ζ та $\mathrm{A}_{p\zeta}$.

Для демонстрування простоти запропонованого алгоритму покажемо числові значення вказаних матриць для умов:

- кількість точок на знімку, за якими визначаються коефіцієнти поліному 2-го ступеня, дорівнює 8;
- точки розташовані по краю площі апроксимації.

В цьому випадку матриці A_ζ та $\mathrm{A}_{p\zeta}$ мають вигляд:

$$\mathrm{A}_\zeta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathrm{A}_{p\zeta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Коваріаційна матриця $\mathrm{K} = \mathrm{A}_\zeta \left(\mathrm{A}_\zeta^T \mathrm{A}_\zeta\right)^{-1} \mathrm{A}_\zeta^T$, або в числовому вигляді:

$$\mathrm{K} = \begin{bmatrix} 0.833333 & 0.166667 & 0 & -0.166667 & 0.166667 & -0.166667 & 0 & 0.166667 \\ 0.166667 & 0.666667 & 0.166667 & 0 & -0.166667 & 0.333333 & -0.166667 & 0 \\ 0 & 0.166667 & 0.833333 & 0.166667 & 0 & -0.166667 & 0.166667 & -0.166667 \\ -0.166667 & 0 & 0.166667 & 0.666667 & 0.166667 & 0 & -0.166667 & 0.333333 \\ 0.166667 & -0.166667 & 0 & 0.166667 & 0.833333 & 0.166667 & 0 & -0.166667 \\ -0.166667 & 0.333333 & -0.166667 & 0 & 0.166667 & 0.666667 & 0.166667 & 0 \\ 0 & -0.166667 & 0.166667 & -0.166667 & 0 & 0.166667 & 0.833333 & 0.166667 \\ 0.166667 & 0 & -0.166667 & 0.333333 & -0.166667 & 0 & 0.166667 & 0.666667 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Як показує аналіз матриці K (при умові, що залишковий член поліному дорівнює 0), точність апроксимації полінома другого ступеня буде порядку 0,9-0,8 від значення середньої квадратичної похибки одиниці ваги.

При наявності залишкового члена поліному похибки на точках (n=8) характеризуються матрицею

$$V1 = \begin{bmatrix} 0.333333 & 0.333333 & 0 & 0 \\ 0 & -0.666667 & 0 & 0 \\ -0.333333 & 0.333333 & 0 & 0 \\ 0.666667 & 0 & 0 & 0 \\ -0.333333 & -0.333333 & 0 & 0 \\ 0 & 0.666667 & 0 & 0 \\ 0.333333 & -0.333333 & 0 & 0 \\ -0.666667 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Згідно отриманим значенням елементів матриці $V1$ залишкові члени C_8x^3 та C_9y^3 на всіх точках повністю поглинаються поліномом другого ступеню (елементи 3-го та 4-го стовпчику дорівнюють нулю). Значення залишкових похибок на точках 1, 3, 5, 7 дорівнюють

$$V_{1,3,5,7} = \pm 0.333(\Delta_6) \pm 0.333(\Delta_7) \quad (16)$$

Для точок, які не використовувалися для визначення коефіцієнтів поліному, залишкові похибки характеризуються матрицею

$$V2 = A'_{\rho\zeta} - \left(A'_{\zeta} Q_{\zeta} A^{T}_{\zeta}\right) \cdot A_{\rho\zeta}, \quad (17)$$

де $A_{\zeta}, A_{\rho\zeta}$ - визначаються за формулами (3),(5) для даних точок.

Таким чином, визначивши апріорі за формулами (13) та (17) матриці $V1$ та $V2$, можна вибрати оптимальну схему розташування точок для даного поліному або передбачити ефективність його використання.

Як показує даний аналіз, для апроксимації проективних перетворень достатньо використовувати поліном другого ступеня (при кількості точок n=8 для визначення C_i). В цьому випадку навіть при $f = 70$мм, $\alpha = 3^0$ залишкова похибка буде дорівнювати порядку 0,06 мм (табл. 2 і (16)).

Збільшення вихідної інформації та збільшення ступеня поліному пов'язано з іншою задачею – апроксимація систематичних спотворень знімка та карти.

Література

1. Лобанов А.Н. Фотограмметрия.-М.,Недра,1984.
2. Міщенко І.І.Можливості апріорної оцінки впливу систематичних спотворень знімків на фотограмметричні побудови. Вісник геодезії та картографії. Київ, 1996,№2(6), с. 58-65.
3. Міщенко І.І. Властивості коваріаційних матриць при використанні фотограмметричних рівнянь колінеарності. Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва (погляд у XXI століття). Ювілейний збірник наукових праць Ліга-Прес, Львів 2000, с.248-256.