УДК 528.33

М. И. МАРЫЧ

О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ МОЛОДЕНСКОГО МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Линейная задача Молоденского, как известно, состоит в определении аномального потенциала $T=T(\rho', \theta, \lambda)$ во внешнем пространстве физической поверхности Земли s с точностью порядка квадрата ее сжатия по измеренным на s аномалиям силы тяжести Δg. Она представляет собой внешнюю граничную задачу для уравнения Лапласа с простейшим граничным условием

$$M_s T \equiv -\left(\frac{\partial T}{\partial \rho'} + \frac{2T}{\rho'}\right)_{\rho' \to \rho} = G_s$$

$(G_s \approx \Delta g)$ [1].

Гармоничность функции $\rho' \dfrac{\partial T}{\partial \rho'} + 2T(\rho', \theta, \lambda)$ вне Земли и ее регулярность на бесконечности, а также разрешимость внешней задачи Дирихле для поверхности s свидетельствуют о возможности преобразования $DG_s = G_c$ от аномалий G_s к их значениям G_c на внешней земной сфере c, называемой сферой Бриллюэна, а следовательно, и о разрешимости данной элементарной задачи [3, 6]. Таким образом, определяемое решение $T=M_s^{-1} G_s$ можно представить в виде интеграла Стокса

$$T = \frac{R^2}{4\pi} \int DG_s S(\widetilde{\rho' \psi})\, d\omega \equiv M_c^{-1} D(G_s), \qquad (1)$$

возмущенного отклонением граничной поверхности от сферы и в котором произведение $M_c^{-1} D$ операторов выражает интегральный оператор M_s^{-1} Молоденского.

Это произведение, действуя на граничные значения $G_s = M_s T$, принадлежащие области определения оператора M_s^{-1}, восстанавливает элементы T (потенциалы) области определения оператора $M_s = D^{-1} M_c$ $(D^{-1} M_c T = G_s)$. Оно так же, как и граничная поверхность s, не зависит от выбора радиуса R сферы c отсчета высот ее рельефа, и в качестве c может быть принята внутренняя земная сфера или сфера, пересекающаяся с s *.

Остановимся на методе решения задачи с помощью интеграла (1) и малого параметра Молоденского, изложенном в [3, 5], и попытаемся при этом получить формулы, определяющие потенциал T вне Земли во втором приближении, что соответствует точности линеаризации задачи.

* Данный вопрос более подробно рассмотрен в [3]. Однако при этом следует иметь в виду различие областей определения операторов M_s и M_s^{-1}, которое не было учтено в [3].

При введении параметра k $(0 \leqslant k \leqslant 1)$ в качестве коэффициента при всех высотах $H = \rho - R$ рельефа поверхности s без изменения граничных значений G_s функциями от него становятся оператор D, представляемый рядом Тейлора

$$DG_s = G_s - \left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_s H + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \rho^2}\right)_s H^2 - \cdots = G_c, \tag{2}$$

и обобщенная функция Стокса

$$S(\tilde{\rho}', \psi) = \frac{1}{R} \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \left(\frac{R}{\tilde{\rho}'}\right)^{n+1} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi), \tag{3}$$

в которой радиус-вектор $\tilde{\rho}'$ исследуемой точки P_s описан суммой $\tilde{\rho}' = R + \tilde{H} + z$, где z — радиальное расстояние от поверхности s до этой точки.

Разложение функции (2) в ряд по степеням k имеет вид [4]

$$G_{ck} = G_s - \left[\left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_0 + k\left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_1\right] kH + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \rho^2}\right) k^2 H^2 - \cdots, \tag{4}$$

где

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_0 = \frac{1}{2\pi R} \int \frac{G_s - \tilde{G}_s}{r^3} d\omega - \frac{2G_s}{R} = -\frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(G_s)_n, \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_1 = \frac{1}{2\pi R} \int \left\{-\left[\left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_0 H - \left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_0 \tilde{H}\right]\right\} \frac{d\omega}{r^3} - \frac{2}{R}\left[-\left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_0 H\right] + \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \rho^2}\right)_0 H;$$

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \rho^2}\right)_0 = \frac{1}{2\pi R} \int \left[\left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_0 - \left(\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \rho}\right)_0\right] \frac{d\omega}{r^3} - \frac{3}{R}\left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_0 = -\frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)\left[\left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_0\right]_n = \frac{1}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+3)(G_s)_n \tag{6}$$

и $r = 2\sin\frac{\psi}{2}$. Разложение по степени параметра k функции (3) приводит к формуле

$$R^2 S(\tilde{\rho}_k', \psi) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \frac{R^{n+2}}{\tilde{\rho}_0'^{\,n+1}} \left[1 - \frac{n+1}{\tilde{\rho}_0'} kH + \frac{1}{2} \frac{(n+1)(n+2)}{\tilde{\rho}_0'^2} kH^2 + \cdots\right] \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi), \tag{7}$$

где $\tilde{\rho}_0' = R + z$ — радиус вектор-точки P_c, смещенной вверх относительно P_s на расстояние, равное высоте $\tilde{H}$.

Подставляя ряды (4) и (7) в (1), после их умножения и некоторых преобразований, в ходе которых использованы разложения по сферическим функциям (5) и (6), а также свойство ортогональности и теорема восстановления этих функций, получаем решение задачи во втором приближении Молоденского. Формулы, определяющие потенциал в этом приближении, имеют вид

$$T=T_0+T_1+T_2, \tag{8}$$

где

$$T_0=\frac{R^2}{4\pi}\int G_s S(\tilde{\rho}_0', \psi)\,d\omega; \tag{9}$$

$$T_1=-\frac{R^2}{4\pi}\int\left(\frac{\partial G}{\partial\rho}\right)_0\left(H-\frac{R}{\tilde{\rho}_0'}\tilde{H}\right)S(\tilde{\rho}_0', \psi)\,d\omega+T_0\frac{\tilde{H}}{\tilde{\rho}_0'}, \tag{10}$$

и

$$T_2=-\frac{R^2}{4\pi}\int\left[\left(\frac{\partial G}{\partial\rho}\right)_1\left(H-\frac{R}{\tilde{\rho}_0'}\tilde{H}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial\rho^2}\right)_0\left(H-\frac{R}{\tilde{\rho}_0'}\tilde{H}\right)^2\right]\times$$

$$\times S(\tilde{\rho}_0', \psi)\,d\omega+T_1\frac{\tilde{H}}{\tilde{\rho}_0}. \tag{11}$$

Из изложенного выше видно, что последовательные приближения аномального потенциала (8) представляют собой разложение интеграла (1) в ряд Тейлора по степеням высоты $\tilde{H}$ в точках P_c внешности сферы Бриллюэна c. Эти приближения не содержат продолжения граничных значений G_s на дополнительную сферу c' радиуса $\tilde{\rho}=R+\tilde{H}$, концентрическую сфере c и пересекающуюся с поверхностью s. Оно появляется тогда, когда c' проходит через данную точку $(z=0)$ [6]. В этом случае разность $H-\dfrac{R}{\tilde{\rho}_0'}\tilde{H}=H-\tilde{H}$ не зависит от выбора радиуса R сферы отсчета высот H, и обобщенная функция $S(\tilde{\rho}_0', \psi)$ становится обычной функцией Стокса $S(R, \psi)$.

Таким образом, метод решения задачи с помощью аналитического продолжения на уровень точки [6] допускает трактовку решения с помощью интеграла (1).

Отметим, что формулы нулевого и первого приближений (9), (10) получены в [2, 5]. Они, а также вторая поправка (11) к нулевому приближению (9) при $z=0$ совпадают с соответствующими формулами, полученными для вычисления потенциала на поверхности Земли [4, 6].

При вычислении потенциала с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия Земли в формуле (11) в качестве высот H можно принять нормальные или нивелирные высоты.

1. *Марич М. И.* О решении задачи Молоденского с учетом сжатия Земли // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1987. Вып. 46. С. 61—64. 2. *Марыч М. И.* Об определении внешнего гравитационного поля Земли // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1982. Вып. 36. С. 68—74. 3. *Марыч М. И.* О трактовке решения краевой задачи теории фигуры Земли методом малого параметра // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1986. Вып. 44. С. 53—57. 4. *Марыч М. И.* О решении задачи Молоденского с помощью ряда Тейлора // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1973. Вып. 17. С. 26—33. 5. *Марыч М. И.* О решении задачи Молоденского с помощью интеграла Стокса // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1989. Вып. 50. С. 69—72. 6. *Мориц Г.* Современная физическая геодезия. М., 1983.

Стаття поступила в редколлегию 17. 02. 89