УДК 528.232

П. А. МЕДВЕДЕВ

О НЕКОТОРЫХ СПОСОБАХ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В ФУНКЦИЯХ НАЧАЛЬНЫХ АРГУМЕНТОВ

Для решения главных геодезических задач на малые и средние расстояния применяют преимущественно способы перехода на поверхность вспомогательной сферы. В этом случае зависимости между сферическими и сфероидическими величинами выражаются в виде быстро сходящихся рядов, а задачи на шаре решают по формулам сферической тригонометрии.

В 1922 г. А. Беррот для этих целей применил конформную проекцию эллипсоида на шар. Им, в частности, рассмотрен способ решения прямой геодезической задачи (ПГЗ), когда исходные данные на эллипсоиде равны соответствующим величинам на шаре радиуса N_1. Относительно зависимостей (I), (II), (III) [6, с. 41] для вычисления сфероидических поправок А. Беррот указывает, что они совпадают с формулами Л. Крюгера, выведенными им другим путем в 1919 г. [3]. Единственное их различие состоит в формуле для вычисления широты B_2, в которой, по выражению Ф. Красовского, «...остроумный подбор (Л. Крюгером) широтного аргумента приводит к ряду упрощений» [3, с. 137]. Следует отметить, что этим приемом еще в 1880 г. пользовался Ф. Гельмерт при преобразованиях выражения для разности широт [1].

Л. Крюгер при выводе формул исходит из известных рядов А. Лежандра для разностей широт, долгот и азимутов в функциях начальной точки, удерживая в них члены до $\sigma^3\eta^2$ включительно. Схематически ряды А. Лежандра [3] можно записать

$$b = B_2 - B_1 = f_1(B_1, A_1, s), \quad (a_1)$$

$$l = L_2 - L_1 = f_2(B_1, A_1, s), \quad (a_2)$$

$$a = A_2 - A_1 \pm 180^\circ = f_3(B_1, A_1, s). \quad (a_3)$$

Полагая в этих равенствах $\eta_1^2=0$, Л. Крюгер разбивает их выражения на сферическую и сфероидическую части. Задачу на шаре радиуса N_1 решает по формулам четвертого способа К. Гаусса [5], разложив их в ряды и введя аддитаменты. Полученные формулы он рекомендует применять при расстояниях до 120 км с точностью требований триангуляции I класса.

Этот же путь решения ПГЗ описывает А. Шедльбауэр [7]. Но в отличие от Л. Крюгера он рассматривает шар радиуса R_1 и применяет другие формулы сферической тригонометрии.

Способ, который проанализирован в [4], предложенный Л. Крюгером для решения ПГЗ, А. Шедльбауэр применяет и для решения обратной геодезической задачи [8].

По мнению Ф. Красовского [5], формулы Л. Крюгера не нашли широкого применения в геодезической практике из-за сложности вычисления широты B_2, хотя остальные формулы проще соответствующих формул О. Шрейбера.

Для облегчения вычисления широты B_2 при расстояниях до 60 км А. Денисов и Б. Скуин [2] составили таблицу поправок. При ее расчетах они применили укороченную формулу А. Беррота. Отброшенные в ней члены третьего порядка [6]

$$-dq_3-dq_3'=\frac{s^3}{6\,N_1^3}\,e'^2\cos^2 B_1\cdot\cos A_1\cdot\cos 2A_1$$

принимают наибольшее значение 0,0002″ при $s=60$ км, $B_1=0$, $A_1=0$.

В формуле (10) для вычисления φ_2 в [2, с. 23] множитель V_1^2 следует исправить на η_1^2. Еще лучше равенство (10) с учетом (13) записать в виде $\varphi_2=\varphi_1+V_1^2\cdot\Delta\varphi$. В формуле (14) для вычисления A_2 последнее слагаемое порядка $e'^2\sigma^3$ нужно отбросить, так как его значение $\leqslant 0{,}00003''$ при $s\leqslant 60$ км.

Рассмотрим прямой путь решения ПГЗ, основанный на ином применении формул сферической тригонометрии.

В предыдущих случаях по своему назначению формулы сферической тригонометрии трактовались как алгоритмы для вычисления сферических величин. А переход на шар применялся для получения сфероидических поправок к сферическому решению в виде быстро сходящихся рядов.

Получить зависимости с улучшенной сходимостью можно и без перехода на шар. Для этого в рядах А. Лежандра нужно сферические величины заменить их суммами. Но по виду членов очень сложно установить функцию, являющуюся их суммой. Этот вопрос легко решается с помощью формул сферической тригонометрии, рассматривая их как суммы сферических величин. Действительно, заменив в формуле сферические величины на соответствующие сфероидические, ее левая часть будет указывать, к какому виду следует преобразовать ряд для определения искомой величины, а правая — сумму сферических членов этого ряда.

Такие преобразования без описания общего подхода выполнил в 1880 г. Ф. Гельмерт при выводе формул для решения ПГЗ по способу вспомогательной точки с применением прямоугольных сфероидических координат [1].

Преобразуем описанным путем ряды А. Лежандра (a_1)—(a_3), удерживая в них, как и Л. Крюгер, члены по порядок $\sigma^3 \cdot \eta^2$ включительно. Для выделения из разложений сферических членов и определения их сумм используем формулы IV способа К. Гаусса (3)—(9), рис. 2 [2, с. 23] при тех же начальных условиях.

Вспомогательную широту φ_0 находим из соотношений (3), (4), обозначая $u = \Delta B$:

$$\operatorname{tg} \Delta B = \operatorname{tg} \frac{s}{H_1} \cdot \cos A_1; \quad (1) \quad \varphi_0 = B_1 + \Delta B. \quad (2)$$

Из прямоугольного треугольника $P_0'P_1'P_2'$ (рис. 2)

$$\sin v = \sin \frac{s}{N_1} \cdot \sin A_1; \quad \cos v = \cos \frac{s}{N_1} / \cos \Delta B.$$

Тогда

$$\operatorname{tg} v = \operatorname{tg} \frac{s}{N_1} \cdot \sin A_1 \cdot \cos \Delta B$$

и выражение (7) для разности долгот на шаре примет вид

$$\operatorname{tg} \Delta\lambda = \frac{\operatorname{tg} \frac{s}{N_1} \cdot \sin A_1 \cdot \cos \Delta B}{\cos \varphi_0}.$$

Из этого равенства следует, что его правая часть является суммой сферических членов для ряда $\operatorname{tg} l$. Подставляя в этот ряд выражение (a_2) и выделяя из него сумму сферических членов, получим

$$\operatorname{tg} l = \frac{\operatorname{tg} \frac{s}{N_1} \cdot \sin A_1 \cdot \cos \Delta B}{\cos \varphi_0} + \frac{u^2 v}{3} e'^2 \cos B_1. \quad (3)$$

Выведем формулу для вычисления широты B_2. В равенстве $B_2 - \varphi_0 = (B_2 - B_1) - \Delta B$ ΔB заменяем рядом, полученным из (1), а вместо $B_2 - B_1$ подставляем разложение (a_1). Сумму сферических членов полученного ряда определяем из соотношений (5) и (6) [2]. Тогда

$$B_2 - \varphi_0 = - V_1^2 \sin \frac{s}{N_1} \cdot \sin A_1 \cdot \operatorname{tg} \frac{l}{2} \sin \varphi_0 + u \eta_1^2 -$$

$$- \frac{u^2}{2} 3 t_1 \eta_1^2 V_1^2 - \frac{u^3}{2} \eta_1^2 (1 - t_1^2) + \frac{u v^2}{6} \eta_1^2 (1 + 9 t_1^2).$$

По аналогии с Л. Крюгером последнее равенство преобразуем к виду

$$B_2 = \varphi_0 - V_1^2 \sin \frac{s}{N_1} \cdot \sin A_1 \cdot \operatorname{tg} \frac{l}{2} \cdot \sin \varphi_0 + u e'^2 \cos^2 \left(B_1 + \frac{3}{4} V_1^2 u \right) +$$

$$+ \frac{uv^2}{6} e'^2 (9 - 8 \cos^2 B_1) - \frac{u^3}{16} e'^2 (1 - 2 \cos^2 B_1). \tag{4}$$

Обратный азимут A_2 геодезической линии вычисляем по формуле

$$A_2 = A_1 + \tau - (\tau - a) \pm 180^\circ, \tag{5}$$

где

$$\operatorname{tg} \tau = \sin \frac{s}{N_1} \cdot \sin A_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_0; \tag{6}$$

$$\tau - a = \operatorname{tg} \frac{s}{2N_1} \cdot \sin A_1 \cdot \sin \Delta B - \frac{uv}{2} e'^2 \cos^2 \left(B_1 - \frac{u}{6} \right) +$$

$$+ \frac{v^3}{12} e'^2 \sin 2 B_1. \tag{7}$$

В равенствах (3), (4), (7):

$$u = \frac{s \cos A_1}{N_1}; \quad v = \frac{s \sin A_1}{N_1}; \quad V_1^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B_1.$$

Если решать ПГЗ при расстояниях до 60 км по исходным данным [2], то в формулах (3), (4), (7) последними слагаемыми можно пренебречь. И тогда

$$\operatorname{tg} \Delta B = 0{,}0050256927; \quad \Delta B = 0{,}0050256504 = 0^\circ 17' 16{,}6148'';$$

$$\varphi_0 = B_1 + \Delta B = 48^\circ 04' 09{,}2618''.$$

$$\operatorname{tg} l = 0{,}0073146130; \quad l = 0{,}0073144826 = 0^\circ 25' 08{,}7203'';$$

$$L_2 = L_1 + l = 36^\circ 14' 45{,}0503''.$$

$$\begin{aligned} B_2 = {} & 0{,}838\,966\,4963 \\ & -0{,}000\,013\,3393 \\ & +0{,}000\,015\,1639 \\ & +0{,}000\,000\,0007 \\ \hline & 0{,}838\,968\,3216 = 48^\circ 04' 09{,}6383''. \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \tau = 0{,}005\,441\,662;$$

$$\tau = 0{,}005\,441\,608 = 0^\circ 18' 42{,}413''.$$

$$\begin{aligned} \tau - a = {} & 0{,}000\,012\,282 \\ & -0{,}000\,000\,037 \\ \hline & 0{,}000\,012\,245 = 0^\circ 00' 02{,}526''. \end{aligned}$$

$$a = \tau - (\tau - a) = 0^\circ 18' 39{,}887'' \text{ и}$$

$$A_2 = A_1 + a + 180' = 224^\circ 30' 53{,}557''.$$

1. *Гельмерт Ф. Р.* Математические и физические теории высшей геодезии. Т. 1. М., 1962. 2. *Денисов А. Н., Скуин Б. Л.* О решении прямой геодезической задачи при малых расстояниях между пунктами // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1981. № 34. С. 22—25. 3. *Красовский Ф. Н.* Руководство по высшей геодезии. Ч. II. М., 1942. 4. *Медведев П. А.* Вывод формул со средними аргументами для решения обратной геодезической задачи // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1984. № 5. С. 20—27. 5. *Ходорович П. А.* Решение главной задачи высшей геодезии методом свободного выбора положения нормальной параллели при конформном изображении поверхности эллипсоида на поверхности шара. Омск, 1938. 6. *Berroth A.* Sphäroidische korrektionsgrossen durch konforme Projektion auf die einhüllende Kugelschar mit parallelkreisformiger Charakteristik // Zeit. f. Verm., 1922. H. 2. S. 41. 7. *Schödlbauer A.* Übertragung geographischer Koordinaten auf Rozugsellipsoiden Reihen auf strenge Formeln der sphärischen Trigonometrie // Allgemeine Vermessungs—Nachrichten. 1979. Bd. 86. H. 4. S, 55, 8, *Schödlbauer A.* Kugeln als Hilfsflächen bei der Lösung der beiden geodättischen Hauptaufgaben // Mitt. geod. Inst. Techn. NUniv. Graz, 1980. H. 35. S. 60—61.

Статья поступила в редколлегию 26. 12. 88