УДК 550.30

Ю. П. ДЕЙНЕКА, А. Л. ЦЕРКЛЕВИЧ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕРО

Понятие о сжатии внутренних слоев постоянной плотности планеты необходимо для решения ряда задач планетарной геодезии и геофизики, например, при построении эллипсоидальных плотностных моделей, при высокоточном определении времен пробега объемных сейсмических волн, при исследовании напряженно-деформированного состояния внутренних оболочек планеты.

Рассматриваемую задачу определения $\alpha(\rho)$ можно решить на основе известного дифференциального уравнения Клеро

$$\frac{d^2\alpha}{d\rho^2}+6\frac{\delta}{D}\frac{d\alpha}{d\rho}-\frac{6}{\rho^2}\left(1-\frac{\delta}{D}\right)\alpha=0. \qquad (1)$$

Граничными условиями для сжатия α являются:
на внешней поверхности

$$\alpha|_{\rho=R}=\alpha_0;$$

в центре Земли

$$\left.\frac{d\alpha}{d\rho}\right|_{\rho=0}=-\frac{1}{4}\frac{\alpha_я}{\delta_я}\left.\frac{d\delta}{d\rho}\right|_{\rho=0},$$

где α_0 — принятое поверхностное сжатие Земли; δ — значение плотности Земли в текущей точке; $\alpha_я$, $\delta_я$ — значения сжатия и плотности в центре Земли; $D=\frac{3}{\rho^3}\int\limits_0^{\rho}\delta(\rho)\rho^2 d\rho$ — средняя плотность сферы радиусом ρ.

Известные методы определения сжатия $\alpha(\rho)$ базируются на решении приближенного уравнения Радо—Дарвина [3]. Численные значения сжатия получены таким образом У. Ламбертом, К. Булленом, Е. Буллардом и др. [1]. Более поздние исследования проведены К. М. Картвелишвили [4], который предложил находить решение дифференциального уравнения (1) в виде некоторой разностной схемы и методом конечных разностей. В работе [2] рассмотрен иной подход к решению уравнения (1), а именно сжатия $\alpha(\rho)$ определялись из решения преобразованного дифференциального уравнения Клеро в интегральное уравнение Радо.

Указанные методы приводят к отличающимся значениям $\alpha(\rho)$, поскольку численные схемы решения дифференциального или интегрального уравнений зависят от многих факторов и в общем не являются устойчивыми. Поэтому поиск других возможных методов решения поставленной задачи не утрачивает своей актуальности.

Рассмотрим решение дифференциального уравнения (1), в основу которого положено разложение в степенные ряды по малому параметру. При этом в качестве закона распределения плотности с глубиной в теле Земли примем выражение вида [5]

$$\delta=\delta_0+\delta_1\rho^2, \tag{2}$$

где $\delta_0=13{,}480-2{,}000\,\Theta_1-4{,}760\,\Theta_2-0{,}260\,\Theta_3-0{,}470\,\Theta_4$; $\delta_1=-3{,}250$.

Введем переменную $x=(\delta_1/\delta_0)\rho^2=\delta^*\rho^2$, тогда в уравнении (1) отношение δ/D можно представить в виде ряда

$$\frac{\delta}{D}=\frac{1+x}{1+3/5x}=(1+x)\sum_{m=0}^{\infty}(-3/5\,x)^m=$$
$$=1+\sum_{m=1}^{\infty}2/5\,(-3/5)^{m-1}x^m=1+2/5\sum_{m=1}^{\infty}(-3/5)^{m-1}x^m. \tag{3}$$

Представим теперь α в виде степенного ряда

$$\alpha=C\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=C\sum_{m=0}^{\infty}a_m(\delta^*)^m\rho^{2m}, \tag{4}$$

где C — некоторая постоянная; a_m — коэффициенты ряда.

Запишем выражение для первой и второй производных от α:

$$\frac{d\alpha}{d\rho}=C\sum_{m=0}^{\infty}2ma_m(\delta^*)^m\rho^{2m-1}=\rho\delta^*C\sum_{m=1}^{\infty}2ma_m x^{m-1}, \tag{5}$$

$$\frac{d^2\alpha}{d\rho^2}=C\sum_{m=0}^{\infty}2m(2m-1)a_m(\delta^*)^m\rho^{2m-2}=$$
$$=C\delta^*\rho\sum_{m=1}^{\infty}2m(2m-1)a_m x^{m-1}. \tag{6}$$

Подставляя (3)—(6) в (1), после соответствующих преобразований получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2(n+1)[(2n+1)+6]a_{n+1}x^n +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} 24/5(-3/5)^{n-k}k\cdot a_k\right)x^n +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 12/5(-3/5)^{n-k}a_k\right)x_k = 0. \qquad (7)$$

Значения плотностей и сжатий внутренних слоев для заданной модели распределения плотности внутри Земли в зависимости от ρ

ρ	δ(ρ), г/см³	α	ρ	δ(ρ), г/см³	α
1,00	2,741	0,00335281	0,45	10,822	0,00255706
0,95	3,527	0,00317200	0,40	10,960	0,00254284
0,90	4,088	0,00305424	0,35	11,082	0,00253046
0,85	4,372	0,00297901	0,30	11,188	0,00251987
0,80	4,641	0,00291157	0,25	11,277	0,00251100
0,75	4,892	0,00285127	0,20	11,350	0,00250380
0,70	5,128	0,00279745	0,15	13,407	0,00249719
0,65	5,347	0,00274951	0,10	13,448	0,00249382
0,60	5,551	0,00270690	0,05	13,472	0,00249181
0,55	5,737	0,00266916	0,01	13,480	0,00249114
0,50	10,668	0,00257320			

Окончательное решение этого уравнения относительно α запишем в виде

$$\frac{\alpha}{C} = \frac{3/5\,x}{1+3/5x}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}(16/5-5a_n)\frac{x^n}{(n+1)(2n+7)}\right\}+\frac{1+a_1x}{1+3/5x}, \qquad (8)$$

где $a_{n+1} = -\dfrac{48}{25(n+1)(2n+7)} - \dfrac{3}{5}a_n\left(1-\dfrac{5}{(n+1)(2n+7)}\right);$

$$a_0 = 1; \quad a_1 = -6/35.$$

Постоянную C определим из выражения (1), задав на поверхности эллипсоида значения $\alpha = 0{,}00335281$ и $\rho = 1$.

В таблице в качестве примера приведены распределение плотности $\delta(\rho)$ сжатия α для принятой здесь модели Земли.

Расчет значений $\alpha(\rho)$ на интервале $0 < \rho \leqslant 1$, выполняемый с шагом 0,05 при различном числе членов ряда, показал, что результаты получаются уже с достаточной степенью точности при учете одного члена ряда. Увеличиние числа членов ряда изменяет α за пределами точности его задаваемого значения на поверхности эллипсоида. Поэтому естественно сделать вывод, что, по существу, мы получили приближенное аналитическое выражение для решения дифференциального уравнения Клеро с необходимой точностью.

1. *Гутенберг Б.* Физика земных недр. М., 1963. 2. *Дейнека Ю. П.* К определению сжатия эллипсоидальных слоев внутри Земли // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1989. Вып. 49. С. 24—29. 3. *Джеффрис Г.* Земля, ее происхождение, история и строение. М., 1960. 4. *Картвелишвили К. М.* Планетарная плотностная модель и нормальное гравитационное поле Земли. М., 1982. 5. *Мещеряков Г. А., Дейнека Ю. П.* Об эллипсоидальном распределении плотности земных недр // Геофизический сб. 1978. Вып. 86. С. 46—53.

Статья поступила в редколлегию 11. 10. 90