УДК 528.33

М. И. МАРЫЧ

ПРОВЕРКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МОЛОДЕНСКОГО НА МОДЕЛИ ПЕРЦЕВА

Решение задачи Стокса с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия α Земли, полученное М. С. Молоденским при условии отсутствия сферической функции первого порядка в свободных членах использованных интегральных уравнений, которое в общем случае не выполняется [2, 3], проверено Б. П. Перцевым на модели [3, 4].

Она представляет собой произвольный простой слой, распределенный на сфере радиуса, равного малой полуоси b земного эллипсоида. Создаваемый этим слоем потенциал вне сферы и эллипсоида можно представить в виде разложения в ряд по шаровым функциям. В результате преобразований решения при $b=1$, выполненных для общего члена ряда

$$T=\rho^{-(n+1)}P_{nk}(x)\cos kL, \tag{1}$$

в котором $x=\sin\Phi$, получено выражение

$$T=[1-\alpha(n+1)(1-x^2)]\,P_{nk}(x)\cos kL \tag{2}$$

для потенциала на поверхности эллипсоида такое же по виду, как и при непосредственной подстановке значения радиуса вектора эллипсоида

$$\rho=1+\alpha\cos^2\Phi$$

в (1), что справедливо при всех значениях n.

Принимая во внимание, что упомянутая выше сферическая функция первого порядка создается не только высотами $H=\rho-R$ рельефа граничной поверхности s, которой в теории Стокса является регуляризированный геоид, а в теории Молоденского физическая поверхность Земли, отсчитываемыми от внешней сферы c (сферы Бриллюэна), но и значениями на этой сфере граничного условия

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial \nu} + \frac{T}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial \nu}, \tag{3}$$

выражающего связь аномалии ускорения свободного падения Δg с аномальным потенциалом T, в работе [1] был предложен другой путь решения задачи, позволяющий получить общие и более строгие формулы для T, а именно формулы, определяющие потенциал на поверхности s и вне ее с точностью до шаровой функции первого порядка. Он заключается в замене условия (3), содержащего дифференцирование по обратному направлению ν нормального ускорения свободного падения γ, более простым граничным условием

$$M_s T \equiv -\left(\frac{\partial T}{\partial \rho'} + \frac{2T}{\rho'}\right)_{\rho' \to \rho} = G_s, \tag{4}$$

позволяющим на основании разрешимости внешней задачи Дирихле для s преобразование $DG_s = G_c$ от G_s привести к значениям G_c функции G на сфере Бриллюэна. Следовательно, решение задачи $T = M_s^{-1} G_s$ можно представить в виде интеграла Стокса

$$T = \frac{R^2}{4\pi}\int DG_s S(\tilde{\rho}', \psi)\, d\omega \equiv M_c^{-1} D(G_s), \tag{5}$$

возмущенного высотами H и в котором произведение операторов $M_c^{-1}D = M_s^{-1}$. Поскольку оператор M_s^{-1} так же, как и оператор M_s, определяется лишь геометрией поверхности s, то вместо внешней сферы c отсчета ее высот может быть принята и любая другая земная сфера, а следовательно, и внутренняя сфера.

Формула, определяющая аномальный потенциал на физической поверхности Земли и вне ее в первом приближении по Молоденскому, которая получена в результате разложения интеграла (5) в ряд по степеням малого параметра, имеет вид

$$T = T_0 + T_1, \tag{6}$$

где

$$T_0 = \frac{R^2}{4\pi}\int G_s S(\rho'_0, \psi)\, d\omega \tag{7}$$

и

$$T_1 = -\frac{R^2}{4\pi}\int \left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_0 \left(H - \frac{R}{\rho_0}\tilde{H}\right) S(\rho'_0, \psi)\, d\omega + \frac{H}{\rho_0} T_0. \tag{8}$$

Здесь $\rho_0' = R + z$ — нулевое приближение радиуса-вектора $\rho' = R + \tilde{H} + z$ данной точки; G_s — граничные значения, равные сумме аномалий ускорения свободного падения Δg на поверхности s и поправок δg к ним за переход от задачи с условием (3) к задаче с условием (4);

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_0 = \frac{1}{2\pi R}\int (G_s - \tilde{G}_s)\ \frac{d\omega}{r^3} - \frac{2G_s}{R} = -\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\ (n+2)(G_s)_n. \tag{9}$$

Поправки δg находим по формуле

$$\delta g = \frac{2\gamma\zeta}{R}(\alpha + q - 3\alpha\sin^2\Phi) - \alpha\gamma\xi\sin 2\Phi,$$

где ζ и ξ — значения высот квазигеоида и уклонений отвеса в меридиане, полученные в сферической аппроксимации, т. е. с помощью формулы (6) при $\alpha=0$ и при $G_s=\Delta g$; $q=\dfrac{a\omega^2}{\gamma_e}\approx\alpha$.

Покажем, что в случае рассмотренной выше модели Земли, правая часть формулы (6) преобразовывается с точностью порядка α^2 в потенциал (1) при всех значениях n за исключением значения $n=1$, при котором граничные значения (4), а следовательно, и потенциала (6) тождественно равны нулю.

Примем в качестве физической поверхности Земли s поверхность земного эллипсоида с большой полуосью $a=R$ и выполним преобразование потенциала (1) согласно формуле (6), сохраняя при этом малые величины порядка высоты $H=-R\alpha x^2$.

Для этого с помощью (4) и (9) находим выражения для обкладок интегралов (7) и (8). Они имеют вид

$$G_s = G_c\left(1 - \frac{n+2}{R}H\right),$$

где

$$G_c = (n-1)R^{-(n+2)}P_{nk}(x)\cos kL; \tag{10}$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_0 H = -G_c\frac{n+2}{R}H \text{ и } \left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_0 = -G_c\frac{(n+2)}{R}.$$

Подставляя эти выражения в (6) и принимая во внимание, что обобщенная функция Стокса

$$s(\rho_0'.\ \psi) = \frac{1}{R}\sum_{\substack{n=0\\ n\neq 1}}^{\infty}\left(\frac{R}{\rho_0'}\right)^{n+1}\frac{2n+1}{n-1}P_n(\cos\psi),$$

после некоторых преобразований, в ходе которых использовано свойство ортогональности и теорема восстановления сферических функций, получаем

$$T = \frac{G_c}{n-1}R\left(\frac{R}{\rho_0'}\right)^{n+1}\left[1-(n+1)\frac{H}{\rho_0'}\right]. \tag{11}$$

Теперь после подстановки (10) в (11) имеем

$$T = [\rho_0^{-\,n+1} - (n+1)\,H\,\rho_0^{\prime\,-(n+2)}]\,P_{nk}(x)\cos kL,$$

где

$$\rho_0^{\prime\,-(n+1)} - (n+1)\,H\,\rho_0^{\prime\,-(n+2)} = \rho^{\prime\,-(n+1)}.$$

Таким образом, формула (6) действительно приводится к потенциалу (1) с точностью до шаровой функции первого порядка.

1. *Марыч М. И.* О решении задачи Молоденского с учетом сжатия Земли // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1987. Вып. 46. С. 61—64. 2. *Молоденский М. С.* Решение задачи Стокса с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия Земли // Тр. ЦНИИГАиК. 1956. Вып. 112. С. 3—8. 3. *Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И.* Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли // Тр. ЦНИИГАиК. 1960. Вып. 131. 251 с. 4. *Перцев Б. П.* О решении задачи Стокса с относительной погрешностью порядка квадрата сжатия Земли // Тр. ЦНИИГАиК. 1956. Вып. 112. С. 9—12.

Статья поступила в редколлегию 27. 04. 90