УДК 551.24:523.4

Ю. П. ДЕЙНЕКА, А. Л. ЦЕРКЛЕВИЧ

РАСЧЕТ СЖАТИЙ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ СЛОЕВ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ВЕРХНИХ ОБОЛОЧКАХ ЗЕМЛИ И МАРСА

Среди планет земной группы относительно быстрое вращательное движение имеют Земля и Марс, в процессе эволюции которых изменялись фигуры планет и их угловые скорости. По всей вероятности, крупномасштабное изменение фигур этих планет происходило также вследствие перемены их ротационного режима. Вращательное движение Земли и Марса имело различный характер [4, 7]. Наибольший интерес вызывают изменения скорости вращения планет, происходящие в течение длительных в геологическом масштабе периодов времени. Они могут создавать напряжения в оболочке, превосходящие предел ее упругости, и вызывать пластические и необратимые деформации. В этой связи можно рассматривать ряд задач о поле планетарных напряжений, которое должно возникнуть в результате различного взаимодействия оболочек планеты.

Например, известно, что при одной скорости вращения, общей для всех оболочек планеты, каждая из оболочек стремится принять форму, которая определяется плотностью слагающего вещества, т. е. верхние оболочки с относительно малой плотностью вещества должны иметь большее сжатие, чем более глубокие оболочки, сложенные веществом большей плотности. Следовательно, можно ожидать, что между оболочками с разной плотностью вещества возникает взаимодействие — сжатие в полюсных областях и растяжение в экваториальной зоне. В процессе эволюции планеты вследствие изменения ее скорости вращения эти взаимодействия приобретают динамический характер, за счет чего происходит перераспределение планетарных полей напряжений. Кроме того, можно предположить, что на интегральное поле напряжений планеты оказывают действие гравитационные силы, связанные с перераспределением масс, а также другие факторы, выявляющиеся во взаимодействии вещества в теле планеты. Поэтому учет всех факторов, влияющих на напряженное состояние в оболочках планеты, представляется весьма сложной проблемой. Как начальный шаг в этом направлении можно рассматривать задачу расчета напряженного состояния в упругих оболочках, связанную с изменением сжатия внутренних слоев постоянной плотности в модели планеты.

Таким образом, для решения указанной задачи приходим к необходимости определения сжатий эллипсоидальных слоев одинаковой плотности внутри планеты.

Расчет сжатия внутренних слоев постоянной плотности внутри планеты можно выполнить на основе дифференциального уравнения Клеро, преобразованному Радо к интегральному уравнению [3, 5]

$$D(r)\,r^5\,[1+\eta(r)]^{1/2}=5\int_0^r D(r)\,\psi(\eta)\,r^4\,dr\,, \tag{1}$$

где $D(r)$ — функция распределения плотности при любом значении радиуса r. Функция

$$\psi(\eta)=\frac{1+\eta/2-\eta^2/10}{\sqrt{1+\eta}}\,, \tag{2}$$

а параметр сжатия (параметр Радо)

$$\eta=\frac{r}{\alpha}\frac{d\alpha}{dr}\,, \tag{3}$$

где α — сжатие эллипсоидального слоя внутри планеты.

Из (1) следует

$$\eta(r)=\left[\frac{5}{D(r)\,r^5}\int_0^r D(r)\,\psi(\eta)\,r^4\,dr\right]^2-1. \tag{4}$$

Записав (3) в виде

$$\frac{d\alpha}{dr}=\alpha\frac{\eta(r)}{r}\,,$$

найдем

$$\alpha(r)=\alpha_0\exp\left[-\int_r^R\frac{\eta(r)}{r}\,dr\right], \tag{5}$$

где α_0 — сжатие поверхностного эллипсоида.

Приняв, что $r=R\rho$ и $dr=Rd\rho$, а также, что $\rho=1$ при $r=R$, получим следующие интегральные уравнения для вычисления $\alpha(r)$:

$$\alpha(\rho)=\alpha_0\exp\left[-\int_\rho^1\frac{\eta(\rho)}{\rho}\,d\rho\right], \tag{6}$$

где

$$\eta(\rho)=\left\{\frac{5}{D(\rho)\,\rho^5}\int_0^\rho D(\rho')\,\psi\left[\eta(\rho')\right]\rho'^4\,d\rho'\right\}^2-1. \tag{7}$$

В (7) $\Psi(\eta)$ определяется выражением (2), а

$$D(\rho)=\frac{3}{\rho^3}\int_0^\rho\delta(\rho')\,\rho'^2\,d\rho', \tag{8}$$

где $\delta(\rho')$ — значение плотности в текущей точке вдоль радиуса планеты.

Последовательность решения этих уравнений такова: в первом приближении полагаем $\Psi(\eta)=1$; зная функцию распределения плотности $\delta(\rho)$, находим $D(\rho)$, а затем $\eta(\rho)$ и $\alpha(\rho)$. В каждом последующем приближении $\Psi(\eta)$ вычисляем с учетом $\eta(\rho)$, найденного в предыдущем приближении. По вычисленным значениям функции $\eta(\rho)$ контролируем сходимость процесса итераций и $\alpha(\rho)$ вычисляем после того, когда $\eta(\rho)$ определено с точностью, соответствующей точности задания α_0. Кроме того, поскольку процесс численного интегрирования в (6) и (7) неустойчив, т. е. вычисляемые величины осциллируют в зависимости от ρ, то в алгоритме предусмотрена их регуляризация, основанная на методе средних арифметических частичных сумм Фробениуса—Чезаро и Фейера [8, 9].

Описанный алгоритм реализован для вычисления сжатий внутренних слоев одинаковой плотности Земли и Марса. При этом модельное распределение плотности внутри планет задавалось аналитическим выражением вида [6, 7]

$$\delta(\rho) = A - \sum_{i=1}^{k} \Theta_i h_i + B\rho^2 + C\rho^4, \qquad (9)$$

где стандартная разрывная функция $\Theta_i=0$, если $\rho<\rho_i$ и $\Theta_i=1$, если $\rho>\rho_i$; h_i — скачок плотности на границах разрывов; A, B, C — некоторые коэффициенты.

Для плотностной модели Земли [6] $A=13{,}4808$ г/см^3, $B=-3{,}2514$ г/см^3, $C=0{,}0013$ г/см^3, $h_1=2{,}0000$ г/см^3, $h_2=4{,}7600$ г/см^3, $h_3=0{,}2600$ г/см^3, $h_4=0{,}4700$ г/см^3.

Для плотностной модели Марса [7] $A=6{,}6406$ г/см^3, $B=-0{,}3810$ г/см^3, $C=0{,}0026$ г/см^3, $h_1=2{,}5100$ г/см^3, $h_2=0{,}3500$ г/см^3, $h_3=0{,}6900$ г/см^3.

В качестве исходного значения сжатия на внешней поверхности планет принято: для Земли $\alpha_0=0{,}00335281$ и $\alpha_0=0{,}004112$ [10], для Марса $\alpha_0=0{,}00523$ и $\alpha_0=0{,}00504$ [7].

Значения α_0 для Земли соответствуют скорости ее вращения в настоящее время и 500 млн. лет назад [10]. Различие в значениях для Марса обусловлено возможным влиянием крупномасштабной аномальной тектонической структуры Фарсида или вековым замедлением вращения планеты [7].

В таблице приведены вычисленные на различных глубинах значения α для Земли и Марса при заданных значениях α_0.

Рассмотрим теперь общий метод решения пространственной осесимметричной задачи о напряженно-деформированном состоянии замкнутой сферической оболочки, состоящей из неоднородных в радиальном направлении изотропных слоев постоянной толщины, подверженных действию неравномерных поверхностных и массовых сил [1].

Для указанной задачи принимаем в качестве исходных уравнений известные соотношения теории упругости в сферической системе координат r, φ, Θ: уравнения равновесия, выражения для деформаций через перемещения и соотношения обобщенного закона Гука.

Учитывая замкнутость оболочки и условия на граничных поверхностях, которые могут быть сформулированы как в напряжениях, так и перемещениях, разрешающую систему уравнений для данной задачи представляем в виде

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = -\frac{2}{r}\left(1+\frac{a_{13}}{a_{11}+a_{12}}\right)\sigma_r - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \tau_{r\varphi}\operatorname{ctg}\alpha\right) +$$

$$+\frac{2u_r}{r^2(a_{11}+a_{12})} - \frac{1}{r^2(a_{11}+a_{12})}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + u_\varphi \operatorname{ctg}\varphi\right) - F_r,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} = \frac{a_{13}}{r(a_{11}+a_{12})}\frac{\partial \sigma_r}{\partial \varphi} - \frac{3}{2}\tau_{r\varphi} - \frac{1}{r^2(a_{11}+a_{12})}\frac{du_r}{d\varphi} -$$

$$-\frac{1}{\Delta r^2}\left[a_{11}\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} + \operatorname{ctg}\varphi\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_\varphi \operatorname{ctg}^2\varphi\right) + a_{12}u_\varphi\right] - F_\varphi,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\Theta}}{\partial r} = -\frac{3\tau_{r\Theta}}{r} - \frac{1}{2r^2(a_{11}-a_{12})}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial u_\Theta}{\partial \varphi} - u_\Theta \operatorname{ctg}\varphi\right) +\right.$$

$$\left. + 2\operatorname{ctg}\varphi\left(\frac{\partial u_\Theta}{\partial \varphi} - u_\Theta \operatorname{ctg}\varphi\right)\right] - F_\Theta;$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \left(a_{33} - \frac{2a_{13}^2}{a_{11}+a_{12}}\right)\sigma_r + \frac{2a_{13}}{a_{11}+a_{12}}\frac{1}{r}u_r + \frac{a_{13}}{a_{11}+a_{12}} \times$$

$$\times \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_\varphi \operatorname{ctg}\varphi\right), \qquad (10)$$

Значения сжатий эллипсоидальных слоев внутри планет

ρ	Земля		Марс	
	$\alpha_0=0{,}004112$	$\alpha_0=0{,}0033528$	$\alpha_0=0{,}00504$	$\alpha_0=0{,}00523$
1,00	0,004112	0,0033528	0,00504	0,00523
0,95	0,003990	0,0032534	0,00496	0,00515
0,90	0,003876	0,0031601	0,00489	0,00508
0,85	0,003753	0,0030601	0,00480	0,00500
0,80	0,003630	0,0029598	0,00471	0,00489
0,75	0,003513	0,0028642	0,00460	0,00478
0,70	0,003395	0,0027681	0,00449	0,00466
0,65	0,003287	0,0026802	0,00438	0,00455
0,60	0,003210	0,0026178	0,00434	0,00451
0,55	0,003167	0,0025825	0,00422	0,00438
0,50	0,003149	0,0025678	0,00420	0,00436
0,40	0,003110	0,0025358	0,00419	0,00434
0,30	0,003047	0,0024847	0,00419	0,00433
0,20	0,002941	0,0023993	0,00417	0,00433
0,10	0,002937	0,0023968	0,00415	0,00432
0,01	0,002934	0,0023944	0,00412	0,00427

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} = a_{44}\tau_{r\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{r}u_\varphi,$$

$$\frac{\partial u_\Theta}{\partial r} = a_{44}\tau_{r\Theta} + \frac{1}{r}u_\Theta, \quad \Delta = a_{11}^2 - a_{12}^2, \tag{10}$$

где a_{nm} — упругие постоянные, фигурирующие в соотношениях закона Гука; σ_r, σ_φ, σ_Θ, $\tau_{r\varphi}$, $\tau_{r\Theta}$, $\tau_{\varphi\Theta}$ — компоненты напряжений; u_r, u_φ, u_Θ — перемещения; F_r, F_Θ, F_φ — поверхностные нагрузки или объемные силы.

Замкнутость оболочки вращения по Θ, независимость коэффициентов дифференциальных уравнений от Θ позволяют применить метод разделения переменных. Все величины, как искомые, так и заданные, представляем следующими рядами:

$$\sigma_r(r,\varphi) = \sum_{n=}^{\infty} \sigma_r(r)P_n(\cos\varphi), \quad \tau_{r\varphi}(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_{r\varphi}(r)\frac{dP_n(\cos\varphi)}{d\varphi},$$

$$\tau_{r\Theta}(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{r\Theta}(r)\frac{dP_n(\cos\varphi)}{d\varphi}, \quad u_r(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega(r)P_n(\cos\varphi),$$

$$u_\varphi(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} u_\varphi(r)\frac{dP_n(\cos\varphi)}{d\varphi}, \quad u_\Theta(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} v(r)\frac{dP_n(\cos\varphi)}{d\varphi},$$

$$F_r = \sum_{n=0}^{\infty} F_r(r)P_n(\cos\varphi),$$

$$F_\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} F_\varphi(r)\frac{dP_n(\cos\varphi)}{d\varphi},$$

$$F_\Theta = \sum_{n=1}^{\infty} F_\Theta(r)\frac{dP_n(\cos\varphi)}{d\varphi}, \tag{11}$$

где $P_n(\cos\varphi)$ — полином Лежандра n-го порядка; индекс n в разлагаемых функциях опущен.

Разделяя с помощью (11) переменные в системе (10), для каждого члена разложений получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\overline{N}}{dr} = B(r)\overline{N} + \overline{f}, \quad \overline{N} = \{\sigma_r, \tau_{r\varphi}, \tau_{r\Theta}, u_r, u_\varphi, u_\Theta\}; \tag{12}$$

$$= \quad \| \quad (t,p = 1,2,\cdots,6), \quad \overline{f} = \{f_1, f_2, \cdots, f_6\}.$$

Ненулевые элементы матрицы B и компоненты вектора f для $n \geqslant 1$ имеют следующий вид:

$$b_{11} = -\frac{2}{r}\left(1 + \frac{a_{13}}{a_{11}+a_{12}}\right), \quad b_{12} = \frac{n(n+1)}{r}, \quad b_{14} = \frac{2}{r^2(a_{11}+a_{12})},$$

$$b_{15}=-\frac{b_{14}}{2}n(n+1),\quad b_{21}=\frac{a_{13}}{r(a_{11}+a_{12})},\quad b_{22}=-\frac{3}{r},$$

$$b_{24}=-\frac{1}{2}b_{14},\quad b_{25}=-\frac{a_{11}+a_{12}-a_{11}n(n+1)}{r^2(a_{11}^2-a_{12}^2)},\quad b_{32}=b_{22},$$

$$b_{36}=-\frac{2-n(n+1)}{2r^2(a_{11}-a_{12})},\quad b_{41}=a_{33}-\frac{2a_{13}^2}{a_{11}+a_{12}},\quad b_{44}=2b_{21},$$

$$b_{45}=-n(n+1)b_{21},\quad b_{52}=b_{63}=a_{44},\quad b_{54}=-b_{55}=-b_{66}=-\frac{1}{r},$$

$$f_1=F_r,\quad f_2=F_{\varphi},\quad f_3=F_{\theta}. \tag{13}$$

Для решения на ЭВМ системы уравнений (12) разработан и реализован алгоритм, предусматривающий вычисление всех характеристик напряженно-деформированного состояния в заданных точках оболочки через разрешающие функции [1]. Одномерная краевая задача интегрируется методом дискретной ортогонализации С. К. Годунова [2], что позволяет получать значения напряжений, перемещений и деформаций с высокой степенью точности.

Описанный метод применен для расчета напряженно-деформированного состояния в упругой литосферной оболочке Земли и Марса. При изменении полярного сжатия на величину $\Delta\alpha$ компоненты вектора перемещений на граничных поверхностях $r=$ $=F_0$ и $r=R_1$ определялись выражениями:

$$u_r=-\frac{2}{3}rP_2(\cos\varphi)\,\Delta\alpha(r), \tag{14}$$

$$u_{\varphi}=0.$$

Соответственно компоненты напряжений при разложении в ряды (11) учитывали только полиномы Лежандра 2-го порядка.

Применительно к Земле толщина литосферы принималась равной 100 км [11]. Модуль сдвига $G=0{,}56\cdot10^{12}$ дин/см^2, коэффициент Пуассона $\nu=1/3$ [11]. Для Марса толщина литосферы по некоторым оценкам составляет 200 км [7]. Упругие постоянные для литосферы Марса принимались такими же, как и для литосферы Земли.

В результате решения указанной задачи окончательно получены главные σ_1, σ_2, σ_3 и касательные τ_1, τ_2, τ_3 напряжения, соответственно определяемые как

$$\sigma_2=\sigma_{\theta};\quad \sigma_{1,3}=\frac{\sigma_r-\sigma_{\varphi}}{2}+\tau_{\max},$$

$$r_{\max}=\sqrt{\frac{(\sigma_r-\sigma_{\varphi})^2}{2}+\tau_{r\varphi}^2},$$

$$\tau_1=0{,}5|\sigma_1-\sigma_2|,\quad \tau_2=0{,}5|\sigma_1-\sigma_3|,\quad \tau_3=0{,}5|\sigma_2-\sigma_3 \tag{15}$$

Далее по полученным данным построены распределения главных нормальных σ_1, σ_2, σ_3 и касательных τ_1, τ_2, τ_3 напряжений в плоскостях меридиональных сечений в экваториальной и биссектральной плоскостях.

Анализ этих результатов позволяет сделать следующие обобщающие выводы.

Напряженное состояние в литосферах Земли и Марса, возникающее вследствие замедления их скорости вращения, характеризуется возрастанием касательных напряжений на экваторе с непрерывным уменьшением их значений к полюсу.

В оболочках планет по главным нормальным напряжениям выделяются экваториальная зона сжатия и высокоширотные области растяжения в северном и южном полушариях. Граница между этими зонами проходит примерно по широте $\pm 35°$.

Планетарные поля напряжений в оболочках Земли и Марса имеют четко выраженную структуру, возможно, изменяющуюся во времени с замедлением скорости вращения планет. Исходя из заданных значений, изменения полярного сжатия планет по интенсивности напряжения в литосфере Земли заметно превосходят напряжения в литосфере Марса. Для Земли максимальные тангенциальные напряжения достигают сотен бар. Однако напряжения носят в известной мере качественный характер, поскольку реологические свойства литосферы планет не являются надежно определенными и носят лишь оценочный характер.

1. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* Статика анизотропных толстостенных оболочек. К., 1985. 2. *Годунов С. К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи матем. наук. 1961. Т. 16. № 3. С. 171—174. 3. *Дейнека Ю. П.* К определению сжатия эллипсоидальных слоев внутри Земли // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1989. Вып. 49. С. 23—29. 4. *Манк У., Макдональд Т.* Вращения Земли. М., 1964. 5. *Мельхиор П.* Физика и динамика планет. В 2 т. М., 1976. Т. 2. 6. *Мещеряков Г. А., Дейнека Ю. П.* Об эллипсоидальном распределении плотности земных недр // Геофиз. сб. 1978. Вып. 86. С. 46—53. 7. *Мещеряков Г. А., Церклевич А. Л.* Гравитационное поле, фигура и внутреннее строение Марса. К., 1987. 8. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 2 т. М., 1959. Т. 2. 9. *Хемминг Р. В.* Численные методы для научных работников и инженеров. М., 1972. 10. *Denis C.* Lithospherie deformation cavsed by the secular change of the Earth's rotation speed // Terra cognita. 1986. V. 6. N 2. P. 315. 11. *Fu R.-s.. Huang P.-h.* The global stress field in the lithosphere obtained from the satellite gravitational harmonics // Phys. Earth and Planet Inter. 1983. V. 31. N. 3. P. 269—276.

Статья поступила в редколлегию 27.04.90