

Г. А. ШЕХОВЦОВ

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ОШИБОК КООРДИНАТ ПУНКТОВ

Ковариационная матрица ошибок координат пунктов сети является средством хранения в цифровой форме данных, которые служат источником получения различных критериев. Эти критерии будем называть абсолютными или относительными в зависимости от того, характеризуют ли они точность положения отдельных пунктов или точность взаимного расположения пунктов. Все критерии в той или иной мере являются геометрической интерпретацией ковариационной матрицы, представляя собой радиусы кругов, радиусы-векторы эллипса или подеры (в том числе их большие и малые полуоси), площади кривых. Следовательно, различные кривые (так называемые геометрические критерии) могут служить источником получения, средством хранения в наглядной форме семантометрической информации или наглядной формой сопровождения вычислительных операций. Под семантометрической информацией будем понимать качественную и количественную характеристику содержания, которая заключена в данном геометрическом критерии.

В работах [1—4, 7, 9] рассматриваются некоторые способы геометрической интерпретации ковариационной матрицы ошибок криволинейных и прямоугольных координат. В связи с этим возникает задача выбора рациональных способов и геометрических критериев, позволяющих осуществлять наиболее полную геометрическую интерпретацию как компонентов ковариационной матрицы, так и ее инвариантов и других характеристик.

Пусть (рис. 1, а, б) положение пункта P на плоскости определено прямой угловой (измерены β_1, β_2 или α_1, α_2) или линейной (измерены s_1, s_2) засечкой. В этом случае ковариационная матрица так называемых «фиксированных расстояний» l_1 и l_2 [5] имеет вид матрицы Грама

$$K_{12} = \begin{pmatrix} l_1^2 & l_1 l_2 r_{12} \\ l_1 l_2 r_{12} & l_2^2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

В [5] приведена методика вычисления l_1 и l_2 для различных функций криволинейных координат. В геометрическом смысле (рис. 1) l_1 и l_2 являются радиусами-векторами эллипса средних квадратических отклонений (с. к. о.) по направлению сторон угловой засечки или по перпендикулярным к сторонам направлениям линейной засечки. Одновременно это и радиусы-векторы

подеры эллипса по двум взаимно перпендикулярным направлениям α и $\alpha \pm 90^\circ$.

Большая полуось A_0 эллипса с. к. о., дирекционный угол которой φ_0 , всегда располагается внутри острого угла γ угловой засечки. Если угол засечки тупой, то большая полуось располагается внутри острого угла, являющегося дополнением угла засечки до 180° . Если засечка линейная, то внутри ее острого угла или внутри острого его дополнения до 180° располагается

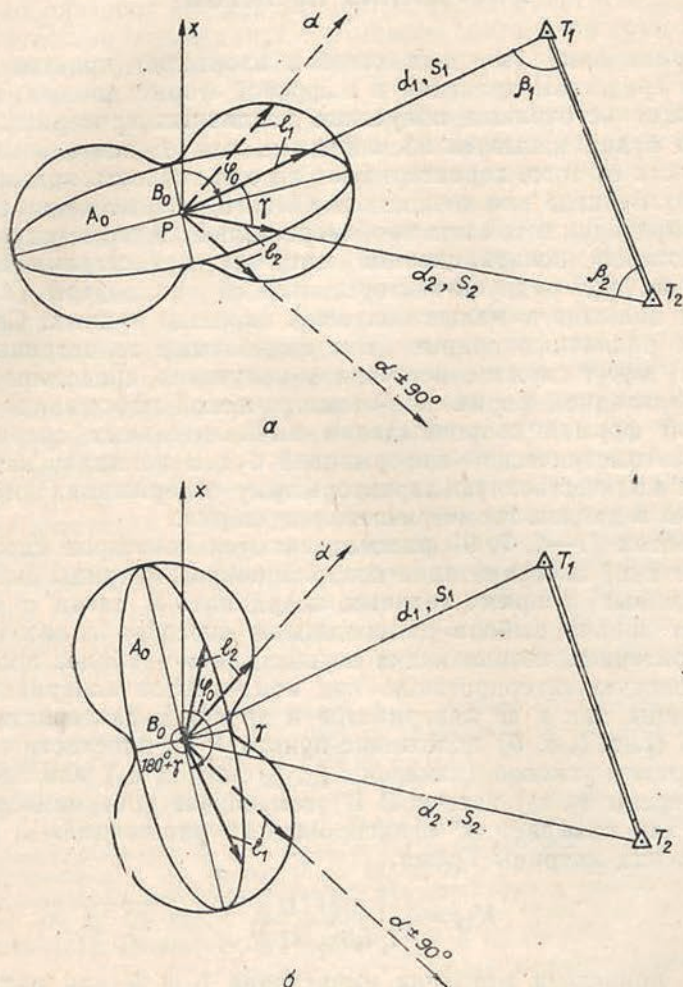


Рис. 1. Геометрический смысл l_1 и l_2 при угловой (а) и линейной (б) засечках.

малая полуось B_0 . Это обстоятельство мы используем в дальнейшем при рассмотрении критериев оптимизации.

Коэффициент корреляции r_{12} между с. к. о. l_1 и l_2 равен косинусу угла между радиусами-векторами l_1 и l_2 эллипса. Так (рис.

1, а) в случае угловой засечки $r_{12} = \cos \gamma$, а линейной (рис. 1, б) — $r_{12} = \cos(\gamma + 180^\circ)$.

С учетом сказанного необходимо признать, что эллипс с. к. о. и его подера не позволяют осуществлять полную геометрическую интерпретацию компонентов ковариационной матрицы (1). Действительно, из рис. 1 следует, что с помощью эллипса можно продемонстрировать только геометрическое содержание коэффициента корреляции между с. к. о. l_1 и l_2 . В свою очередь с по-

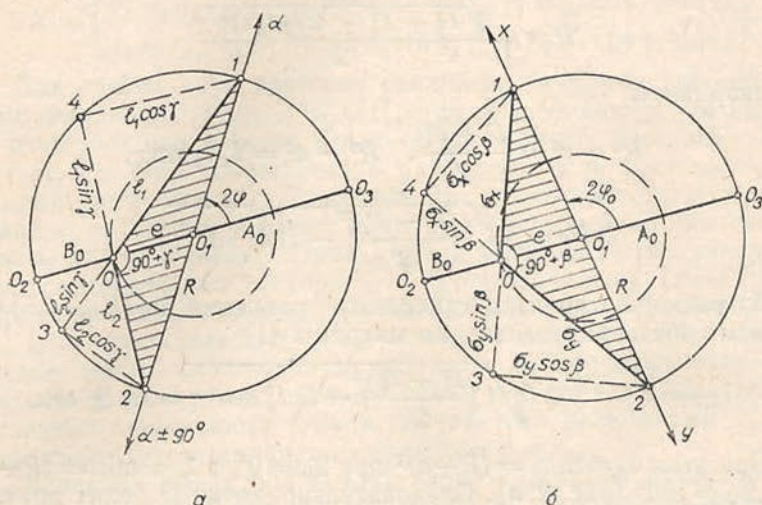


Рис. 2. Окружность с. к. о. в случае криволинейной (а) и прямоугольной (б) системах координат.

мощью подеры можно показать только направления, по которым ошибка положения пункта P соответствует данным с. к. о. l_1 и l_2 . Сказанное относится к любым радиусам-векторам эллипса и соответствующим им радиусам-векторам подеры, в том числе и к с. к. о. σ_x и σ_y по осям координат.

В связи с такой малой семантоматической информативностью эллипса и его подеры в отношении ковариационной матрицы (1), в работе [7] отдается предпочтение так называемому кругу Моора. Этот круг позволяет непосредственно проиллюстрировать дисперсии l_1^2 , l_2^2 и кофактор $l_1 l_2 r_{12}$. Методика построения такого круга описана в [5].

Как видим, ни один из рассмотренных геометрических критериев не позволяет в явном виде, т. е. без каких-либо дополнительных геометрических построений (если используется эллипс или подера) или аналитических расчетов (если используется круг Моора) показать одновременно одномерное и двумерное распределение случайных величин. Иными словами, эти критерии не позволяют показать одновременно с. к. о. l_1 и l_2 , направление их действия и коэффициент корреляции между ними.

Полную геометрическую интерпретацию ковариационной матрицы (1) можно осуществить с помощью преобразованной формы эллипса — окружности *с. к. о.* Для этого построим треугольник 1—0—2 (рис. 2, а) со сторонами l_1, l_2 и углом $(90^\circ + \gamma)$ между ними. Проведя из точки O_1 , как из центра, окружность радиусом $R = O_1-1 = O_1-2$, получаем искомую окружность *с. к. о.* с внутренним эксцентриситетом $e = OO_1$. Для такой окружности справедливы равенства

$$R, e = \frac{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 \pm 2 l_1 l_2 \sin \gamma}}{2} \quad (2)$$

и инварианты

$$\begin{aligned} R^2 + e^2 &= \frac{l_1^2 + l_2^2}{2}, \quad R^2 - e^2 = l_1 l_2 \sin \gamma, \\ 2 Re &= \sqrt{\left(\frac{l_1^2 + l_2^2}{2}\right)^2 - l_1^2 l_2^2 \sin^2 \gamma}. \end{aligned} \quad (3)$$

Из решения характеристического уравнения $\det(K_{12} - \lambda E) = 0$ найдем собственные значения матрицы (1)

$$\lambda_{1,2} = \frac{l_1^2 + l_2^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{l_1^2 + l_2^2}{2}\right)^2 - l_1^2 l_2^2 \sin^2 \gamma} = (R \pm e)^2. \quad (4)$$

При этом $\lambda_1 = \max = (R+e)^2$ при $2\varphi = 0^\circ$, а $\lambda_2 = \min = (R-e)^2$ при $2\varphi = 180^\circ$ (рис. 2, а). Следовательно, точка O делит диаметр O_2O_3 на отрезки, равные большей $A_0 = OO_3 = \sqrt{\lambda_1}$ и малой $B_0 = OO_2 = \sqrt{\lambda_2}$ полуосям эллипса. Поэтому окружность *с. к. о.* с внутренним эксцентриситетом — это окружность, диаметр которой равен сумме корней квадратных из собственных значений ковариационной матрицы, иными словами

$$R, e = \frac{A_0 \pm B_0}{2}. \quad (5)$$

Число обусловленности такой матрицы $\text{cond } K_{12} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ представляет собой в геометрическом смысле отношение квадратов отрезков $(OO_3)^2 : (OO_2)^2$, а условие $\text{cond } K_{12} = \min$ используется для I -оптимизации геодезических построений. С этой точки зрения идеальным случаем является диагональная матрица, что имеет место, например, при полярной засечке, когда l_1 совпадает с A_0 , l_2 совпадает с B_0 (если $l_1 > l_2$).

Для угла 2φ (рис. 2, а) справедливо выражение

$$\text{tg } 2\varphi = \frac{2 l_1 l_2 \cos \gamma}{l_1^2 - l_2^2}, \quad (6)$$

причем по этой формуле получим два значения угла φ и $\varphi + 90^\circ$ между направлением α и полуосями эллипса. Это доказывает,

что l_1 и l_2 являются с. к. о. пункта P по двум взаимно перпендикулярным направлениям α и $\alpha+90^\circ$. Поэтому, проведя (рис. 2, б) линию 1—2 под удвоенным дирекционным углом большой полуоси $2\varphi_0$, получаем с. к. о. σ_x , σ_y и коэффициент корреляции $r_{xy} = \sin(90+\beta)$, что составляет одну из отличительных особенностей окружности с. к. о. Переход от системы криволинейных координат к прямоугольным можно осуществить также аналитически по формуле

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_x \sigma_y & r_{xy} \\ \sigma_x \sigma_y & \sigma_y^2 & r_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1^2 & 0 \\ 0 & l_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \sin \alpha_2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Для любых двух векторов евклидова пространства справедливо выражение $(l_1 l_2 r_{12})^2 \leq l_1^2 l_2^2$, откуда с очевидностью вытекает известное неравенство Коши—Буняковского, поскольку $-1 \leq r_{12} \leq +1$. Оно обращается в равенство, если векторы l_1 и l_2 коллинеарны ($\gamma=0^\circ$). Теоретически это соответствует случаю, когда $B_0=0$, $e=R$ и имеет место прямая линейная зависимость $l_1=cl_2$, где c — скаляр. При $l_1 l_2 r_{12}=0$ матрица Грама диагональная, следовательно векторы l_1 и l_2 ортогональны ($\gamma=90^\circ$), некоррелированы, так как $r_{12}=\sin(90^\circ+\gamma)=0$, а l_1 совпадает с A_0 , l_2 — совпадает с B_0 (при $l_1>l_2$). Имеем простое геометрическое доказательство того, что A_0 и B_0 корреляционно независимы. В остальных случаях ($\gamma \neq 0$ или 90°) степень тесноты линейной зависимости между случайными величинами σ_x и σ_y характеризуется величиной кофактора $\sigma_x \sigma_y r_{xy}$.

Величина кофактора $\sigma_x \sigma_y r_{xy}$ равна удвоенной площади треугольника 1—0—2 (рис. 2, б) и для ее геометрической интерпретации в отличие от эллипса с. к. о. не требуется никаких дополнительных построений. Чем эта площадь больше, тем больше по модулю коэффициент корреляции r_{xy} . Причем она зависит от соотношения e и R и от значения угла $2\varphi_0$. Если $2\varphi_0=0^\circ$, то σ_x совпадает с A_0 , а σ_y — с B_0 . И наоборот, при $2\varphi_0=180^\circ$ σ_x совпадает с B_0 , а σ_y — с A_0 . В обоих случаях треугольник 1—0—2 трансформируется в прямую линию O_2O_3 , его площадь равна нулю, следовательно с. к. о. σ_x и σ_y некоррелированы. Кофактор достигает своего максимума по модулю при $2\varphi_0=90$ или 270° , тогда $\sigma_x=\sigma_y$, $\sigma_x \sigma_y r_{xy}=2eR$.

С помощью окружности с. к. о. легко показать, что матрицы (1) и (7) являются подобными. Действительно, преобразования подобия (вращение диаметра 1—2 на рис. 2) не изменяют собственных значений этих матриц, поскольку при 2φ или $2\varphi_0 \rightarrow 0$ или 180° эти матрицы постепенно приобретают диагональную форму с расположенными на главной диагонали собственными значениями. Такой наглядностью ни эллипс, ни подера не обладают.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию инвариантов и других характеристик матриц (1), (7). Так, след этих матриц

$$Sp K_{12}, K = l_1^2 + l_2^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 = A_0^2 + B_0^2 = M_H^2 = 2(R^2 + e^2), \quad (8)$$

представляет собой (см. рис. 2) сумму квадратов двух сторон треугольника $1-0-2$, или сумму квадратов отрезков O_2O и OO_3 , или удвоенную сумму квадратов радиуса и эксцентриситета окружности с.к.о. След матрицы применяется для характеристики точности положения пункта по Гельмерту [8], а условие $M_H = \min$ является условием A -оптимизации геодезических построений. Так, угловая засечка считается A -оптимальной, если ее угол $\gamma = 109^\circ 28'$. Заметим, что при наличии в такой засечке только необходимых измерений получим тот же результат и при угле засечки $70^\circ 32'$.

Определитель матриц (1), (7) соответствует определителю Грама

$$\det K_{12}, K = l_1^2 l_2^2 \sin^2 \gamma = \sigma_x^2 \sigma_y^2 \sin^2 \beta = A_0^2 B_0^2 = M_W^2 = (R^2 - e^2)^2, \quad (9)$$

т. е. он равен (см. рис. 2) квадрату произведения длин отрезков секущей, проходящей через точку O , а именно $(O-1)^2 \times (O-3)^2$, или $(O-2)^2 \times (O-4)^2$, или $(OO_2)^2 \times (OO_3)^2$. Эти произведения для данной окружности — величины постоянные, поэтому имеем в отличие от эллипса или подеры простое и наглядное геометрическое толкование инвариантности определителя матрицы относительно выбранной системы координат, в частности углов 2φ или $2\varphi_0$. Определитель используют в качестве средней ошибки пункта по Веркмайстеру [8], а условие $M_W = \min$ является условием D -оптимизации. Угловая засечка является D -оптимальной, если ее угол $\gamma = 120^\circ$. Добавим, что при наличии в такой засечке только необходимых измерений, получим тот же результат при угле засечки 60° .

При различных вариантах засечки (см. рис. 1) получим различные матрицы вида (1) или (7). Сравнение вариантов можно осуществлять путем сравнения между собой (1) или (7) с использованием помимо рассмотренных критериев, например, различных норм этих матриц.

Так, m -норма матрицы (иначе ∞ -норма, первая норма) равна максимальной по модулю сумме строки, а ее l -норма равна максимальной по модулю сумме столбца. Но поскольку матрицы (1) или (7) симметричные, то у каждой из них m - и l -нормы равны между собой, т. е.

$$m^2\text{-норма} = l^2\text{-норма} = \max_{i,j} \sum_{i,j} |a_{ij}|. \quad (10)$$

В геометрическом смысле эти нормы представляют собой максимальную сумму квадрата стороны треугольника $1-0-2$ и его удвоенной площади. В случае $2\varphi_0 = 0$ или 180° обе нормы равны максимальному сингулярному числу λ_1 (иначе спектральная норма или нижняя грань матрицы). Это число используют в качестве общей (полной) средней ошибки пункта по Фридриху [8]:

$$M_F = \lambda_1 = \frac{M_H^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{M_H^2}{2}\right)^2 - M_W^2}, \quad (11)$$

иными словами $M_F = A_0$, а условие $A_0 = \min$ соответствует условию E -оптимизации геодезических построений. Простая засечка отвечает этому условию при $\gamma = 90^\circ$.

K -нормой матриц (1) или (7), иначе евклидовой или сферической нормой, является корень квадратный из суммы квадратов всех компонентов матрицы

$$K^2 - \text{норма} = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2}, \quad (12)$$

геометрический смысл этих элементов показан выше.

M -норма матриц (1) или (7)

$$M^2 - \text{норма} = (m \cdot n)^{\frac{1}{2}} \max |a_{ij}| = 2 \max |a_{ij}|, \quad (13)$$

т. е. равна удвоенному максимальному значению квадрата стороны треугольника $1-0-2$.

Из других скалярных оценок отметим Гауссову среднюю ошибку пункта

$$M_G^2 = G \{(\lambda_1, \lambda_2)\} = \left(\frac{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}}{2} \right)^2 = R^2, \quad (14)$$

откуда $M_G = R$ и представляет собой радиус окружности *с. к. о.*

Критический анализ некоторых скалярных оценок рассматривается в работах, например, Б. И. Никифорова, В. Г. Конусова, В. А. Коугия, в том числе и нами в работе [5]. Дополним этот анализ следующими соображениями. Во-первых, такие оценки, как M_H , M_W , M_F , M_G и K -норма матрицы не зависят от ориентировки эллипса *с. к. о.* относительно координатных осей, следовательно, и от коэффициента корреляции r_{xy} . Во-вторых, m -, l - и M -нормы не учитывают всех элементов матрицы, что также относится, например, и к радиальной ошибке M_H . Поэтому с целью устранения указанных недостатков мы предлагаем радиальную ошибку с учетом корреляции, которую можно назвать M_k -нормой матрицы:

$$M_k^2 - \text{норма} = \sum_{i,j} |a_{ij}| = M_H^2 + eR |\sin 2\varphi_0|, \quad (15)$$

равная сумме абсолютных значений компонентов матрицы (1) или (7). Второе слагаемое выражения (15) учитывает одновременно форму эллипса *с. к. о.* и его ориентировку. Это качество M_k -нормы матрицы позволяет рекомендовать ее для более объективной сравнительной оценки точности положения геодезических пунктов одним числом.

В дополнение к сказанному отметим, что при оптимизации геодезических построений особый интерес представляет E -оптимальное положение пункта. Это возможно при $\lambda_1 = \min$, когда

согласно рис. 2 $A_0 = R = B_0$. В геометрическом смысле это приводит к нулевому эксцентриситету окружности *с. к. о.* и упрощению всех вышеприведенных формул. Кроме того, если принять во внимание площади кругов радиуса R и e , то их разность равна площади эллипса, а сумма — площади подеры этого эллипса. При этом длина окружностей большого и малого кругов является функцией следа и определителя матриц (1) и (7):

$$2\pi(R, e) = \pi \sqrt{\text{sp } K_{12}, K \pm 2 \sqrt{\det K_{12}, K}}. \quad (16)$$

Отметим одну особенность при геометрической интерпретации с помощью окружности *с. к. о.* ковариационной матрицы ошибок прямоугольных координат пунктов сети $\sigma_0^2 Q$, где σ_0^2 — дисперсия единицы веса, Q — матрица обратных весов неизвестных. На практике для построения эллипса, подеры или круга Моора для отдельного пункта сети предварительно вычисляют A_0 , B_0 и φ_0 , а дальнейшие построения геометрических критериев осуществляют различными способами, в том числе с привлечением средств компьютерной графики. Для этого необходимо наличие программ для ЭВМ, обеспечивающих требуемые вычисления и построения кривой.

Эффективность предлагаемого способа геометрической интерпретации заключается в том, что, выделив в матрице $\sigma_0^2 Q$ блок 2×2 , относящийся к i -му пункту сети, необходимо вычислить только угол

$$(90^\circ + \beta_i) = 180^\circ - \arcsin \frac{\sigma_{x_i} \sigma_{y_i} r_{x_i y_i}}{\sigma_{x_i} \sigma_{y_i}}. \quad (17)$$

На сторонах этого угла достаточно отложить значения σ_{x_i} и σ_{y_i} и получить окружность *с. к. о.* (рис. 2, б), причем сразу ориентированную относительно координатных осей, поскольку ее диаметр 1—2 дает направление осей x и y . Если подсчитанное по формуле (17) значение угла меньше 180° , то точка O должна находиться слева по отношению к оси x (левый эксцентриситет). При значении угла больше 180° точка O должна находиться справа по отношению к оси x (правый эксцентриситет). Для полученной таким образом окружности *с. к. о.* справедливы все вышеприведенные соображения. Добавим, что с помощью разработанных нами приборов [6] можно по значениям только σ_{x_i} , σ_{y_i} (используемым в качестве «фиксированных расстояний») и углу $(90^\circ + \beta_i)$ непосредственно вычерчивать эллипс, подеру, окружность *с. к. о.* и другие геометрические критерии без каких-либо дополнительных затрат времени.

До сих пор речь шла об абсолютных геометрических критериях, характеризующих погрешность положения отдельных пунктов сети. Для построения относительных критериев, характеризующих точность взаимного положения пунктов, необходимо матрицу Q преобразовать в матрицу весовых коэффициентов приращений координат

$$Q_{\Delta x \Delta y} = f Q f^T, \quad (18)$$

где f — матрица преобразования уравненных координат в приращения координат, состоящая из нулей и единиц, а f^T — транспонированная по отношению к ней матрица. К полученной таким образом ковариационной матрице $\sigma_0^2 Q_{\Delta x \Delta y}$ применимы все вышеприведенные формулы и приемы.

Таким образом, окружность *с. к. о.* является полной и наглядной формой геометрической интерпретации ковариационной матрицы ошибок координат и приращений координат пунктов сети.

1. Ганьшин В. Н. Эллипс ошибок и характеристика точности // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. 1986. № 6. С. 3—12.
2. Гордеев Ю. А. Обобщение приемов оценки точности положения пунктов плановых опорных геодезических сетей // Уч. зап. высш. морского училища им. адм. Макарова. Л., 1959. вып. 15. 133 с.
3. Конусов В. Г. Критерии точности планового положения пунктов инженерно-геодезических сетей // Совершенствование методов инженерно-геодезических работ. Новосибирск. 1981. Т. 13/53. С. 3—11.
4. Торопин Е. В. Геометрическое представление компонентов ковариационной матрицы погрешностей и ее инвариантов // Маркшейдерское дело и геодезия. Новые результаты в области автоматизации, методики и обработки маркшейдерско-геодезических измерений. Л., 1988. С. 105—109.
5. Шеховцов Г. А. Критерии и средства геометрической интерпретации погрешности положения точек на плоскости. — Горький. 1987. 198 с. — Рукопись деп. в ВИНТИ, № 192—В87.
6. Шеховцов Г. А. О геометрической интерпретации ошибки положения точки на плоскости // Геодезия и картография. 1987. № 6. С. 25—28.
7. Grafarend E. Helmertsche Fusspunktcurve oder Mohrscher Kreis? // Allgemeine Vermessungs — Nachrichten. 1969. Bd. 76. № 6. S. 239—250.
8. Grafarend E. Mittlere Punktfehler und Vorwartseinschneiden // Zeitschrift für Vermessungswesen. 1971. Bd. 96. № 2. S. 41—54.
9. Konopasek W. Eine graphische Darstellung der Formeln für die Punktlagegenauigkeit in der Ebene und für die Fehlerellipse // Z. Vermessungswesen. 1964. Bd. 89. № 4. S. 118—122.

Статья поступила в редколлегия 28.06.89