УДК 528.33

И. А. БАСОВА

К ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ НАЗЕМНОЙ ТРИАНГУЛЯЦИИ

Единое пространственное положение точки можно получить по результатам измерения горизонтальных и вертикальных углов или зенитных расстояний, астрономических наблюдений φ, λ, α в отдельных пунктах сети без привлечения поверхности относимости.

В ряде стран мира (ЧССР, ФРГ) ведутся работы по построению таких сетей и апостериорной оценке их точности, поэтому представляет интерес и является актуальным вопрос об априорной оценке точности пространственных наземных построений.

Рассмотрим звено пространственной триангуляции (рис. 1). Предположим, что на всех пунктах измерены горизонтальные углы a_i, зенитные расстояния z_{ik}, z_{ki} прямых направлений и обратных, определены астрономические координаты φ, λ исходного пункта, астрономический азимут начальной стороны.

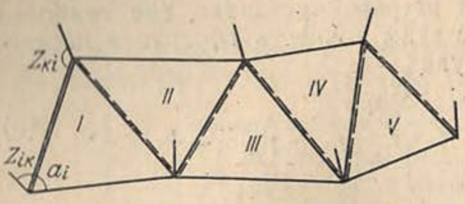

Рис. 1. Схема цепочки треугольников Камчатского полигона.

Для предрасчета точности такого построения найдем выражение для средней квадратической ошибки длины связующей стороны. Для каждого плоского связующего угла A_i справедливо соотношение

$$dA_i = -\frac{1}{\sin A_i}[(-\sin z_{ij}\cos z_{ik} + \cos z_{ij}\sin z_{ik}\cos a_i)\,dz_{ij} + (-\sin z_{ik}\cos z_{ij} + \cos z_{ik}\sin z_{ij}\cos a_i)\,dz_{ik} - \sin z_{ij}\sin z_{ik}\sin a_i\,da_i], \qquad (1)$$

получаемое дифференцированием выражения

$$\cos A_i = -\sin z_{ik}\sin z_{ij} + \cos z_{ik}\cos z_{ij}\cos a_i. \qquad (2)$$

Если обозначить связующие углы в цепи треугольников через A и A', то для любой стороны цепочки справедливо равенство

$$\frac{ds}{s} = \frac{db}{b} + \Sigma\operatorname{ctg} A\,dA - \Sigma\operatorname{ctg} A'\,dA' = \frac{db}{b} - \Sigma\frac{\operatorname{ctg} A}{\sin A}(\cos u_{a_i}\,dz_{ij} + \cos u_{a_k}\,dz_{ik} - \sin z_{ij}\sin z_{ik}\sin a_i\,da_i) + \Sigma\frac{\operatorname{ctg} A'}{\sin A'}(\cos u_{a'_i}\,dz_{ij} + \cos u_{a'_k}\,dz'_{ik} - \sin z'_{ij}\sin z'_{ik}\sin a'_i\,da'_i, \qquad (3)$$

$$\cos u_{a_i} = -\sin z_{ij}\cos z_{ik} + \cos z_{ij}\sin z_{ik}\cos a_i;$$

где

$$\cos u_{a_k} = -\sin z_{ik}\cos z_{ij} + \cos z_{ik}\sin z_{ij}\cos a_i;$$

b — базисная сторона.

Предполагая, что все горизонтальные углы a_i и зенитные расстояния измерены равноточно, перейдем от (3) к выражению для средней квадратической ошибки длины связующей стороны пространственной триангуляции:

$$\left(\frac{m_s}{s}\right)^2 = \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \Sigma\frac{\cos^2 A}{\sin^4 A}[(\cos^2 u_{a_i} + \cos^2 u_{a_k})\,m_z^2 + \sin^2 z_{ij}\sin^2 z_{ik}\sin^2 a_{ik}\,m_a^2]. \qquad (4)$$

При $z=90$ формула (4) идентична известной формуле плоской триангуляции.

Оценим возможность замены составляющих направлений для каждого угла средним значением зенитных расстояний $z_{\text{ср}}$. Тогда формула (4) принимает более простой вид:

$$\left(\frac{m_s}{s}\right)^2 = \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \Sigma \frac{\cos^2 A}{\sin^4 A} [0{,}5 \sin^2 2z_{\text{ср}} (1 - \cos A)^2 m_z^2 + \\ + \sin^4 z_{\text{ср}} \sin^2 A m_a^2]. \qquad (5)$$

Таблица 1

Значение горизонтальных углов и зенитных расстояний для цепочки треугольников Камчатского полигона

Номер треугольника	Номер угла	Горизонтальные углы	Направление	Зенитные расстояния
			1	87°07′21″
	4	112°29′18,70″	3	89 03 35
			4	92 59 38
1	1	25 19 43,15	3	91 45 31
			1	38 23 45
		42 10 47,08	4	91 00 45
			3	91 45 31
	1	31 58 41,84	17	92 54 13
			1	88 23 45
2	3	63 24 52,73	17	91 39 54
			1	87 14 10
	17	84 36 26,66	3	88 25 00
			2	87 31 05
	1	83 32 12,63	17	92 54 13
			1	92 34 32
3	2	62 41 46,92	17	94 01 23
			1	87 14 10
	17	33 46 01,97	2	86 08 00
			17	94 01 23
	2	40 47 31,50	7	93 04 16
			2	87 05 26
4	7	67 44 18,30	17	91 18 54
			2	86 08 00
	17	71 28 10,44	7	88 47 54

Расчеты выполним на примере реальных данных (табл. 1) Камчатского геодинамического полигона, любезно предоставленными лабораторией геодинамики ДВНЦ АН СССР.

Найдем отношение второго слагаемого формулы (5)

$$\Sigma \frac{\cos^2 A}{\sin^4 A} [0{,}5 \sin^2 2 z_{\text{ср}} (1 - \cos A)^2 m_z^2 + \sin^4 z_{\text{ср}} \sin^2 A\, m_a^2]$$

к выражению

$$\Sigma \frac{\cos^2 A}{\sin^4 A}\left[(\cos^2 u_{a_i} + \cos^2 u_{a_k})\, m_z^2 + \sin^2 z_{ij} \sin^2 z_{ik} \sin^2 a\, m_a^2\right]$$

формулы (4).

Это отношение, как следует из табл. 2, колеблется в пределах 0,991—1,001, т. е. погрешность замены составляющих горизонтальных углов средним значением зенитных расстояний находится в пределах 1%.

Таблица 2

Вычисление второго слагаемого формул (4) и (5)

Номер треугольника	Номер связ. угла	$\Sigma \frac{\cos^2 A}{\sin^4 A}[\cos^2 u_{a_i} + \ldots]$, $m_z = 1''$	$\Sigma \frac{\cos^2 A}{\sin^4 A}[\cos^2 u_{a_i} + \ldots]$, $m_z = 0{,}5''$	$\Sigma \frac{\cos^2 A}{\sin^4 A}[0{,}5 \sin^2 2z_{cp} \ldots]$, $m_z = 1''$	$\Sigma \frac{\cos^2 A}{\sin^4 A}[0{,}5 \sin^2 2z_{cp} \ldots]$, $m_z = 0{,}5''$
	1	0,0838415	0,0831770	0,0839435	0,0833127
I	3	0,5996170	0,5933947	0,5935479	0,5935752
	17	0,0044898	0,0044717	0,0044874	0,0044711
II	1	1,2110479	1,2555993	1,2542878	1,2537667
	3	0,1226128	0,1218188	0,1219126	0,1219125
III	17	0,0044898	0,0044717	0,0044874	0,0044711
	1	0,0006053	0,0006002	0,0006015	0,00060148
III	2	0,1319217	0,1312533	0,1309956	0,1309986
	7	0,0818691	0,0810999	0,0812185	0,0811967
	17	0,0555004	0,0551583	0,0553036	0,0551328

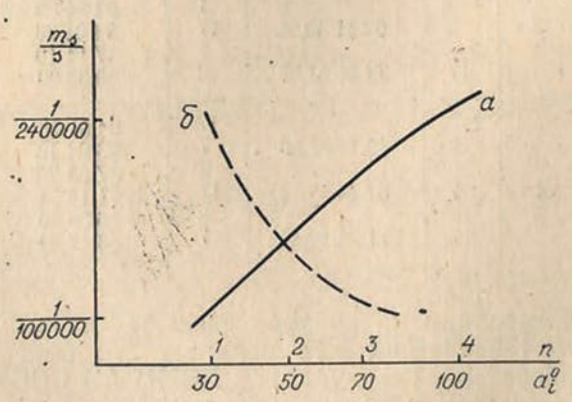

Рис. 2. Зависимость точности определения длины стороны от формы треугольника (*а*), числа передач (*б*).

При построении пространственной наземной триангуляции наиболее выгодной формой принята равносторонняя. В этом случае

$$\left(\frac{m_s}{s}\right)^2 = \left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \Sigma\,(0{,}06 \sin^2 2\, z_{\text{ср}}\, m_z^2 + 0{,}33 \sin^4 z_{\text{ср}}\, m_a^2).$$

Зависимость точности длины стороны от формы треугольника и числа передач представлена на рис. 2.

Точность определения стороны при четырех передачах колеблется от 1/240000 до 1/100000 при $m_z = 1''$ и от 1/100000 до 1/70000 при $m_z = 3''$ (табл. 3).

Следовательно, для обеспечения точности передачи стороны в пространственной триангуляции не ниже точности триангуляции 1,2 класса с учетом перспективы повышения точности измерения зенитных расстояний целесообразно предусмотреть дополнительное измерение связующей стороны.

Таблица 3

Точность передачи стороны в пространственной наземной триангуляции в зависимости от различной точности измерения зенитных расстояний

Номер стороны	Относительные ошибки	
	$m_z = 1''$	$m_z = 3''$
1—3	1/192 300	1/102 700
4—3	1/238 400	1/128 2000
3—17	1/148 300	1/ 84 500
1—17	1/142 000	1/ 88 000
2—17	1/118 100	1/ 77 800
1—2	1/121 500	1/ 76 000
2—7	1/110 600	1/ 68 000
7—17	1/105 100	1/ 77 900

Статья поступила в редколлегию 14. 12. 87