

ДЕЯКІ АСПЕКТИ ОЦІНКИ ТОЧНОСТІ В ЛІНІЙНИХ МЕРЕЖАХ

© Кравцов О.М., 2002

The investigations of the paper [15] were developed for accuracy estimation of point coordinates based on rigorous error propagation. The closed analytical expressions for covariance matrixes corresponded to 2D and 3D cases of coordinate determinations were derived. Fig. 1 and Fig 2 illustrate accuracy distribution for two examples of the above mentioned 2D and 3D cases.

Вивчення апіорної оцінки точності необхідно розпочинати з пошуку зв'язків між помилками вимірних величин та помилками визначення геометричних елементів фігур у мережах трилатерації.

Формули, що відображають помилки місцезнаходження пунктів мережі, які визначаємо, повинні встановлювати їх залежність від геометричної форми мереж та відстаней до вихідних пунктів. Одною з фігур, яку найчастіше застосовують в мережах трилатерації, є трикутник вихідних пунктів.

Змоделюємо задачу. Розглянемо систему плоских прямокутних координат. Позначимо вихідні пункти 1, 2, 3 з відомими координатами (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) , (X_3, Y_3) , а пункт P , який визначається, з координатами X, Y . Неважко бачити (рис. 1), що для однозначного визначення плоских координат X, Y пункту P необхідно знати приведені до горизонту відстані L_1, L_2, L_3 від нього до пунктів 1, 2, 3 з відомими координатами.

$$X = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta Y_{12} \Delta Y_{13} \Delta Y_{23} + \Delta Y_{12} (X_3^2 - L_3^2) - \Delta Y_{13} (X_2^2 - L_2^2) + \Delta Y_{23} (X_1^2 - L_1^2)}{\Delta Y_{12} X_3 - \Delta Y_{13} X_2 + \Delta Y_{23} X_1}, \quad (1)$$

$$Y = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta X_{12} \Delta X_{13} \Delta X_{23} + \Delta X_{12} (Y_3^2 - L_3^2) - \Delta X_{13} (Y_2^2 - L_2^2) + \Delta X_{23} (Y_1^2 - L_1^2)}{\Delta X_{12} Y_3 - \Delta X_{13} Y_2 + \Delta X_{23} Y_1}, \quad (2)$$

де прийняті традиційні позначення

$$\left. \begin{aligned} \Delta X_{ij} &= X_j - X_i \\ \Delta Y_{ij} &= Y_j - Y_i \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

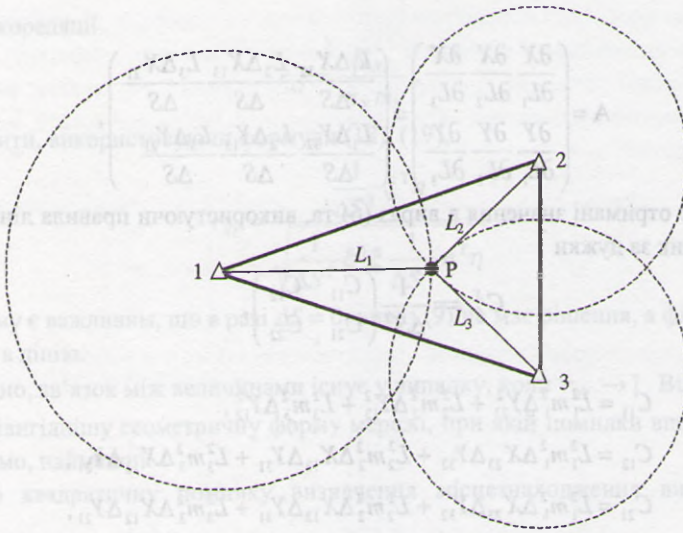


Рис. 1. Геометрія лінійної засічки на площині

Приведені до горизонту відстані L_i обчислюємо за формулою

$$L_i = \sqrt{l_i^2 - (H - H_i)^2}, \quad (4)$$

де l_i – значення вимірної похилої відстані між пунктами 1, 2, 3 та P; H_i , H – геодезичні висоти пунктів 1, 2, 3 та P.

Оцінку точності координат (1), (2) виконаємо за правилом перетворення коваріацій. Запишемо коваріаційну матрицю помилок вимірів L_i у вигляді

$$C_l^x = \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

де m_i^2 – середні квадратичні помилки вимірювання ліній.

Тоді коваріаційну матрицю функції координат можна знайти

$$C_f^x = A C_l^x A^T. \quad (6)$$

Знайдемо матрицю A

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial L_1} & \frac{\partial X}{\partial L_2} & \frac{\partial X}{\partial L_3} \\ \frac{\partial Y}{\partial L_1} & \frac{\partial Y}{\partial L_2} & \frac{\partial Y}{\partial L_3} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

На початку знаходимо похідні $\frac{\partial X}{\partial L_1}$, $\frac{\partial X}{\partial L_2}$, $\frac{\partial X}{\partial L_3}$, $\frac{\partial Y}{\partial L_1}$, $\frac{\partial Y}{\partial L_2}$, $\frac{\partial Y}{\partial L_3}$, – диференціюючи формули (1) і (2). Приймаючи позначення

$$\Delta S = X_1 \Delta Y_{23} + X_2 \Delta Y_{31} + X_3 \Delta Y_{12}, \quad (8)$$

запишемо

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial L_1} & \frac{\partial X}{\partial L_2} & \frac{\partial X}{\partial L_3} \\ \frac{\partial Y}{\partial L_1} & \frac{\partial Y}{\partial L_2} & \frac{\partial Y}{\partial L_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L_1 \Delta X_{32}}{\Delta S} & \frac{L_2 \Delta X_{13}}{\Delta S} & \frac{L_3 \Delta X_{21}}{\Delta S} \\ \frac{L_1 \Delta Y_{32}}{\Delta S} & \frac{L_2 \Delta Y_{13}}{\Delta S} & \frac{L_3 \Delta Y_{21}}{\Delta S} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

Підставимо отримані значення в вираз (6) та, використовуючи правила лінійної алгебри, винесемо множник за дужки

$$C_f^X = \frac{1}{\Delta S^2} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

де

$$C_{11} = L_1^2 m_1^2 \Delta Y_{23}^2 + L_2^2 m_2^2 \Delta Y_{13}^2 + L_3^2 m_3^2 \Delta Y_{12}^2, \quad (11)$$

$$C_{12} = L_1^2 m_1^2 \Delta X_{23} \Delta Y_{32} + L_2^2 m_2^2 \Delta X_{13} \Delta Y_{31} + L_3^2 m_3^2 \Delta X_{12} \Delta Y_{21}, \quad (12)$$

$$C_{21} = L_1^2 m_1^2 \Delta X_{23} \Delta Y_{32} + L_2^2 m_2^2 \Delta X_{13} \Delta Y_{31} + L_3^2 m_3^2 \Delta X_{12} \Delta Y_{21}, \quad (13)$$

$$C_{22} = L_1^2 m_1^2 \Delta X_{23}^2 + L_2^2 m_2^2 \Delta X_{13}^2 + L_3^2 m_3^2 \Delta X_{12}^2, \quad (14)$$

Структура формул (11) – (14) дає змогу спростити (10) за допомогою таких допоміжних векторів:

$$\xi = \begin{pmatrix} L_1 m_1 \Delta Y_{23} \\ L_2 m_2 \Delta Y_{13} \\ L_3 m_3 \Delta Y_{12} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\eta = \begin{pmatrix} L_1 m_1 \Delta X_{23} \\ L_2 m_2 \Delta X_{13} \\ L_3 m_3 \Delta X_{12} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

Отже, скалярні добутки цих векторів будуть становити елементи матриці

$$C_f^X = \begin{pmatrix} m_x^2 & K_{xy} \\ K_{yx} & m_y^2 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

а саме середні квадратичні помилки

$$m_x^2 = \frac{1}{\Delta S^2} (\xi, \xi) = \frac{1}{\Delta S^2} \xi^T \xi, \quad (18)$$

$$m_y^2 = \frac{1}{\Delta S^2} (\eta, \eta) = \frac{1}{\Delta S^2} \eta^T \eta, \quad (19)$$

і коефіцієнти кореляції

$$K_{yx} = K_{xy} = \frac{1}{\Delta S^2} (\xi, \eta) = \frac{1}{\Delta S^2} (\eta, \xi) = \frac{1}{\Delta S^2} \eta^T \xi = \frac{1}{\Delta S^2} \xi^T \eta, \quad (20)$$

На основі отриманих виразів легко одержати відповідну кореляційну матрицю R:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \frac{K_{xy}}{m_x m_y} \\ \frac{K_{yx}}{m_x m_y} & 1 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

де коефіцієнт кореляції

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{m_x m_y}, \quad (22)$$

можна обчислити, використовуючи формули (18), (19),

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{\Delta S^2} \xi^T \eta}{\sqrt{\frac{1}{\Delta S^2} \xi^T \xi \frac{1}{\Delta S^2} \eta^T \eta}}, \quad (23)$$

При цьому є важливим, що в разі $\Delta S = 0$, вираз (9) не має рішення, а фігура трикутника вироджується в лінію.

Відповідно, зв'язок між величинами існує у випадку, коли $r_{xy} \rightarrow 1$. Відповідно, можна визначити найвигіднішу геометричну форму мережі, при якій помилки визначення пункту, який визначаємо, найменші.

Середню квадратичну помилку визначення місцезнаходження визначатимемо за формулою

$$M_{pos} = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}, \quad (24)$$

Зрозуміло, що запропонований підхід діє при визначенні в системі плоских прямокутних координат лише для ділянок земної поверхні, розміри яких дозволяють з необхідною точністю представляти їх площиною. У принципі, можна одержати відповідні формули, які б зв'язували точність цього методу з площею, яку займає мережа. Але вирішення такого питання є предметом окремого дослідження. Тепер же ми можемо рекомендувати використовувати запропонований метод у випадках, коли відстані між пунктами не перевищують 10 – 15 км, про що свідчать одержані нами результати. Для наочності вони зображені у вигляді графіка (рис. 2), що показує залежність середньої квадратичної помилки визначення місцезнаходження від його розташування у мережі.

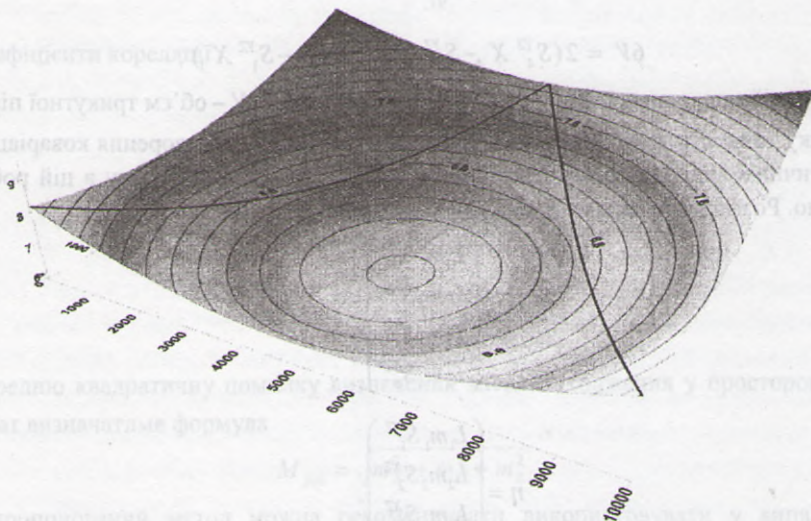


Рис. 2. Приклад (рівносторонній трикутник) розподілу помилки положення пункту на площині

У разі, якщо необхідно передобчислити точність на поверхні, де відстані між пунктами перевищують вищевказані, необхідно перейти до тривимірного випадку. Відповідно за законами просторової геометрії, для отримання однозначного результату, найменша кількість вихідних пунктів буде чотири. Координати пункту, що визначається, можна обчислити за такою формулою

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{pmatrix} S_1^{YZ} & -S_2^{YZ} & S_3^{YZ} & -S_4^{YZ} \\ -S_1^{XZ} & S_2^{XZ} & -S_3^{XZ} & S_4^{XZ} \\ S_1^{XY} & -S_2^{XY} & S_3^{XY} & -S_4^{XY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1^2 - R_1^2 \\ L_2^2 - R_2^2 \\ L_3^2 - R_3^2 \\ L_4^2 - R_4^2 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

де елементи матриць отримані методом, аналогічним вказаному в роботі [15]:

$$S_1^{YZ} = Y_2(Z_3 - Z_4) + Y_3(Z_4 - Z_2) + Y_4(Z_2 - Z_3)$$

$$S_2^{YZ} = Y_1(Z_3 - Z_4) + Y_3(Z_4 - Z_1) + Y_4(Z_1 - Z_3)$$

$$S_3^{YZ} = Y_1(Z_2 - Z_4) + Y_2(Z_4 - Z_1) + Y_4(Z_1 - Z_2)$$

$$S_4^{YZ} = Y_1(Z_2 - Z_3) + Y_2(Z_3 - Z_1) + Y_3(Z_1 - Z_2)$$

$$S_1^{XZ} = X_2(Z_3 - Z_4) + X_3(Z_4 - Z_2) + X_4(Z_2 - Z_3)$$

$$S_2^{XZ} = X_1(Z_3 - Z_4) + X_3(Z_4 - Z_1) + X_4(Z_1 - Z_3)$$

$$S_3^{XZ} = X_1(Z_2 - Z_4) + X_2(Z_4 - Z_1) + X_4(Z_1 - Z_2)$$

$$S_4^{XZ} = X_1(Z_2 - Z_3) + X_2(Z_3 - Z_1) + X_3(Z_1 - Z_2)$$

$$S_1^{XY} = X_2(Y_3 - Y_4) + X_3(Y_4 - Y_2) + X_4(Y_2 - Y_3)$$

$$S_2^{XY} = X_1(Y_3 - Y_4) + X_3(Y_4 - Y_1) + X_4(Y_1 - Y_3)$$

$$S_3^{XY} = X_1(Y_2 - Y_4) + X_2(Y_4 - Y_1) + X_4(Y_1 - Y_2)$$

$$S_4^{XY} = X_1(Y_2 - Y_3) + X_2(Y_3 - Y_1) + X_3(Y_1 - Y_2)$$

$$6V = 2(S_4^{YZ} X_4 - S_3^{YZ} X_3 + S_2^{YZ} X_2 - S_1^{YZ} X_1),$$

де S_i^{XZ} – подвійна площа проекції грані трикутної піраміди, V – об'єм трикутної піраміди.

Оцінку точності проводимо, використовуючи правило перетворення коваріацій, методом, ідентичним використаному для лінійної засічки на площині і тому в цій роботі його пропустимо. Розглянемо отримані допоміжні вектори

$$\xi = \begin{pmatrix} L_1 m_1 S_1^{YZ} \\ L_2 m_2 S_2^{YZ} \\ L_3 m_3 S_3^{YZ} \\ L_4 m_4 S_4^{YZ} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$\eta = \begin{pmatrix} L_1 m_1 S_1^{XZ} \\ L_2 m_2 S_2^{XZ} \\ L_3 m_3 S_3^{XZ} \\ L_4 m_4 S_4^{XZ} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$\zeta = \begin{pmatrix} L_1 m_1 S_1^{xy} \\ L_2 m_2 S_2^{xy} \\ L_3 m_3 S_3^{xy} \\ L_4 m_4 S_4^{xy} \end{pmatrix}, \quad (28)$$

Скалярні добутки цих векторів будуть становити елементи матриці

$$C_f^x = \begin{pmatrix} m_x^2 & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{xy} & m_y^2 & K_{yz} \\ K_{xz} & K_{yz} & m_z^2 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

а саме середні квадратичні помилки

$$m_x^2 = \frac{(\xi, \xi)}{3V^2}, \quad (30)$$

$$m_y^2 = \frac{(\eta, \eta)}{3V^2}, \quad (31)$$

$$m_z^2 = \frac{(\zeta, \zeta)}{3V^2}, \quad (32)$$

Кореляцію між помилками визначимо за формулами

$$K_{xy} = -\frac{(\xi, \eta)}{3V^2}, \quad (33)$$

$$K_{xz} = \frac{(\xi, \zeta)}{3V^2}, \quad (34)$$

$$K_{yz} = -\frac{(\eta, \zeta)}{3V^2}, \quad (35)$$

Коефіцієнти кореляції

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{m_x m_y} = \frac{(\xi, \eta)}{\sqrt{(\xi, \xi)(\eta, \eta)}}, \quad (36)$$

$$r_{xz} = \frac{K_{xz}}{m_x m_z} = \frac{(\xi, \zeta)}{\sqrt{(\xi, \xi)(\zeta, \zeta)}}, \quad (37)$$

$$r_{yz} = \frac{K_{yz}}{m_y m_z} = \frac{(\eta, \zeta)}{\sqrt{(\eta, \eta)(\zeta, \zeta)}}. \quad (38)$$

Середню квадратичну помилку визначення місцезнаходження у просторовій системі координат визначатиме формула

$$M_{pos} = \sqrt{m_x^2 + m_y^2 + m_z^2}. \quad (39)$$

Запропонований метод можна рекомендувати використовувати у випадках, коли відстані між пунктами перевищують 10 – 15 км, про що свідчать одержані нами результати.

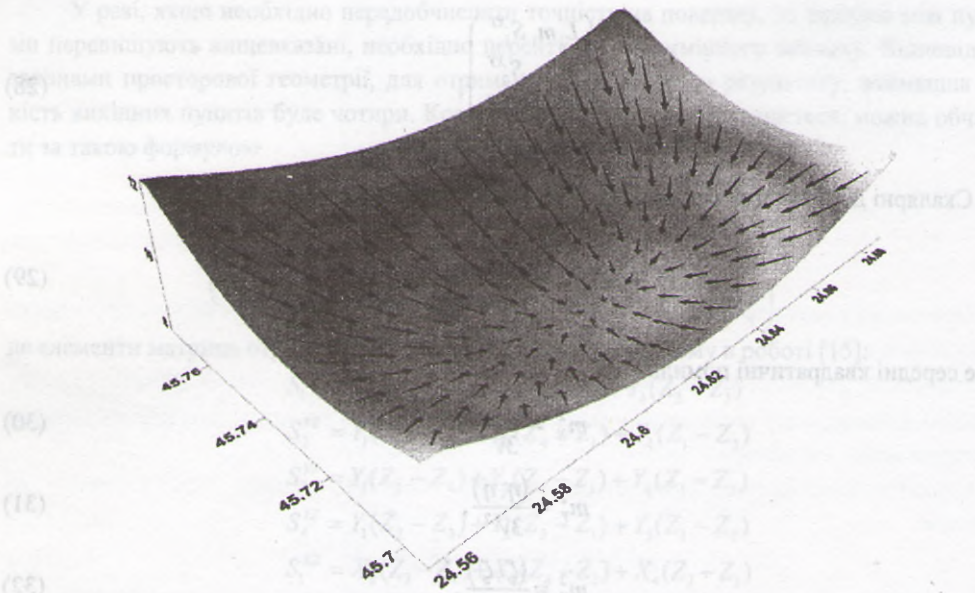


Рис. 3. Приклад (трикутна піраміда) розподілу помилки положення пункту в просторі

Для наочності вони наведені у вигляді графіка (рис. 3), що показує залежність середньоквадратичної помилки визначення місцезнаходження від його розташування у мережі.

1. Вергасов В.А. и др. Вычислительная математика. – М., 1976. – 230 с. 2. Демидович Б.П., Марон А.И. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970 – 664 с. 3. Кузьмин И.И., Сергеев Г.А. Теория математической обработки геодезических измерений. – М.: Военное издательство, 1987. – 271 с. 4. Большаков В.Д., Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений. – М., 1977. 5. Справочник геодезиста / 2-е изд. Большаков В.Д., Левчук Г.П., Баграмуни Г.В. и др. – М., 1975. 6. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М, 1969. 7. Moritz H. Advanced Physical Geodesy. 1980. 8. Mueller I.I. International GPS Geodynamics Service. GPS bulletin. 4(1) 1991. 9. Langley R.B. Communication links for DGPS. GPS World. (5).1993. 10. Langley R.B. The Federal Radionavigation Plan. GPS World.(3).1992. 11. Аквис М.А., Гольдберг В.В. Тензорный анализ. – М.: Наука, 1969. 12. Кочин Н.Е. Векторный анализ и начало тензорного анализа. – М.: Наука, 1965. 13. B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, J. Collins, Global Positioning System. Theory and Practice. Springer-Verlag Wien New York. 1992. 14. R.A. Horn, C.R. Johnson, Matrix Analysis. Cambridge University Press: Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney. 1986. 15. Абрикосов О.А., Кравцов О.М. Про один підхід до визначення координат пунктів у локальній системі за даними GPS-вимірів. Сучасні досягнення геодезії, геодинаміки та геодезичного виробництва / Збірн. наук. праць наук.-техн. конф. – Львів, 1999. – С. 34 – 37. 16. F. Sanso. An exact solution of the rototranslation problem // Photogrammetria, 1973. – V. 29. – Pp. 203 – 216. 17. G.H. Schut, Formation of strips from independent models // Photogrammetric Engineering, 1968. – V. 34. – Pp. 690 – 695.