УДК 528.3

Ю. И. МАРКУЗЕ

ПО ПОВОДУ СТАТЬИ М. Д. ГЕРАСИМЕНКО «РЕКУРРЕНТНОЕ УРАВНИВАНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ»

В реферате к статье М. Д. Герасименко утверждается, что рекуррентный алгоритм уравнивания геодезических сетей коррелатным способом имеет преимущество перед «известным параметрическим рекуррентным способом, предложенным Ю. И. Маркузе», так как он более надежен и «устойчивее к влиянию ошибок округлений» [2]. Эти утверждения могут ввести в заблуждение читателя, поскольку М. Д. Герасименко допускает ряд ошибочных выводов, связанных с историей развития рекуррентного способа уравнивания, с отнесением его к числу коррелатных способов и к не новым и практически неприемлемым предложениям. Исходя из этого, считаем необходимым подробно рассмотреть эти вопросы.

1. Спорным является название рекуррентного способа коррелатным, алгоритм которого содержит набор следующих основных формул: уравнение поправок, составленное для i-го измерения (вес p_i)

$$v_i = a_i \delta x_i + l_i, \tag{1}$$

приводит к перевычислению матрицы обратных весов неизвестных Q_{i-1}

$$Q_i = Q_{i-1} - \frac{1}{g_i} Q_{i-1} a_i^{\mathrm{T}} a_i Q_{i-1}, \tag{2}$$

где величина

$$g_i = \frac{1}{p_i} + a_i Q_{i-1} a_i^{\mathrm{T}}, \tag{3}$$

к уточнению вектора неизвестных

$$x_i = x_{i-1} - \frac{1}{g_i} Q_{i-1} a_i^{\mathrm{T}} \cdot l_i, \tag{4}$$

и квадратичной формы

$$[pvv]_i = [pvv]_{i-1} + \frac{l_i^2}{g_i}.$$

Все эти формулы легко получить исходя из известной леммы об обращении матриц (тождество Шермана—Моррисона) [2]:

$$(A + uv^{\mathrm{T}})^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1} u \cdot v^{\mathrm{T}} A^{-1}}{1 + v^{\mathrm{T}} A^{-1} u}. \tag{5}$$

Можно, конечно, применить и иные способы вывода, что и сделал М. Д. Герасименко в [3] согласно коррелатному способу уравнивания, представив уравнения поправок в виде условного уравнения $v_i - a_i \delta x_i + w_i = 0$. Однако, каким бы ни был вывод, в этом способе уравнивания оцениваемыми неизвестными являются несвязанные точными математическими зависимостями параметры, что лежит в основе именно параметрического, а не коррелатного способа уравнивания. То, что оба способа взаимосвязаны и вывод одного можно сделать через другой, хорошо известно. Однако суть и название способа от этого не меняются и ставить название способа в зависимость от того, как он выведен, неправильно.

Более того, автор статьи [2] противоречит сам себе, когда признает существование рекуррентного параметрического способа, который он отличает от коррелатного только тем, что вектор неизвестных вычисляется не по формуле (4), а лишь после учета всех измерений по формуле

$$x = x^{(0)} - N^{-1} b. \tag{6}$$

Заметим, что формула (4) рекомендована нами в статье [4], так что связывать наши разработки с формулой (6), что, по мнению М. Д. Герасименко, отличает коррелатный способ от предложенного нами параметрического способа, не приходится, поскольку оба способа тождественно совпадают * (если и можно по разному называть, то нельзя противопоставлять).

2. В статье М. Д. Герасименко из-за определенного намеренного или ненамеренного смещения акцентов и нечеткости стиля, неподготовленный читатель может не увидеть того очевидного факта, что изложенный М. Д. Герасименко способ с небольшими видоизменениями есть частный случай знаменитого фильтра Кальмана, предложенного еще в 1961 г. Идеи этого фильтра использованы в статье Ю. М. Неймана [9], в которой формулы рекуррентного уравнивания применены для целей проектирования геодезических сетей, и ссылка на которую отсутствует как в данной статье М. Д. Герасименко [2], так и в его работе [3], где рекомендуется тот же порядок вычислений, что и в [9].

3. М. Д. Герасименко часто ссылается на работы Ю. И. Маркузе, но делает это в такой форме, что исчезает тот фундамент, на котором базируется широкое развитие рекуррентного способа уравнивания. Дело в том, что оно связано не только с выбором матрицы

$$Q_0 = 10^q E. \tag{7}$$

Если бы избыточные измерения учитывались после всех необходимых, как это делалось ранее, то применение рекуррентно-

---

* Кроме того, формулу вида (6) М. Д. Герасименко выводит в (3) не из параметрического, а из коррелатного способа. Это еще раз подтверждает тождественность обоих способов, но не новизну того или иного. Все дело заключается в порядке учета измерений (см. ниже).

го алгоритма оказалось бы нецелесообразным. Действительно, в этом случае проще составить матрицу коэффициентов нормальных уравнений сразу для всей сети и обратить ее. В общем случае объем вычислений такой же, как и при обращении матрицы N_1, составленный только по необходимым измерениям, иными словами, учет избыточных измерений при этом уравнивании оказался бы излишним. Не случайно в [8] отмечается, что применение рекуррентной формулы обращения матрицы удобно для описания, но не для практического использования при вычислениях.

Дело в том, что нами предложено избыточные измерения учитывать не после всех необходимых измерений, а сразу после определения тех неизвестных, которые они связывают, и при постепенном увеличении номеров — вводимых в сеть вновь определяемых необходимыми измерениями неизвестных. В данном случае удается, применяя формулу (2), работать не с матрицей Q_{i-1} порядка k, где k — число неизвестных, а лишь с ее верхним левым блоком, порядок которого увеличивается постепенно. Это приводит к значительному сокращению объема вычислений. Кроме того, нами показано, что учет необходимых неизвестных не изменяет уже вычисленный блок матрицы Q_{i-1}, а лишь окаймляет его новыми столбцами, относящимися к новым неизвестным, что является не меньшим резервом повышения эффективности применения рекуррентного способа.

Такой вычислительный процесс возможен не только при задании матрицы Q_0 согласно (7). В нашей статье [5], с которой М. Д. Герасименко также знаком, поскольку делает на нее ссылку, приведена формула

$$Q_i = \begin{pmatrix} Q_{i-1} & -Q_{i-1}B^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{-1} \\ -A^{-1}BQ_{i-1} & A^{-1}(P^{-1}+BQ_{i-1}B^{\mathrm{T}})(A^{\mathrm{T}})^{-1}, \end{pmatrix}$$

где A и B — матрицы коэффициентов уравнений поправок необходимых измерений соответственно при новых и уже определенных неизвестных, которая позволяет выполнять вычисления и без введения матрицы Q_0. Например, в нивелирных сетях после учета i-го хода с начальной и конечной точками s и t очень просто получить матрицу Q_i:

$$Q_i = \begin{pmatrix} Q_{i-1} & (Q_{i-1})_s \\ (Q^{\mathrm{T}}_{i-1})_s & (Q_{i-1})_{ss} + 1/p_i \end{pmatrix}.$$

Здесь $(Q_i)_s$ и $(Q_{i-1})_{ss}$ — соответственно s-столбец и диагональный элемент матрицы Q_{i-1}. Значительное сокращение объема вычислений достигается таким способом и при уравнивании плановых сетей. Остается только удивляться тому, что М. Д. Герасименко не замечает способа вычислений, изложенного в [5].

4. Но, по-видимому, это делается не случайно, а с целью показать, что наше «предложение полагать матрицу $Q_0 = 10^q E$, где $q \gg 0$, нельзя считать оптимальным, особенно при уравни-

вании свободных сетей, так как это вынуждает на первых шагах до набора необходимых измерений по (2) работать с очень плохо обусловленными матрицами» [2]. Он утверждает, что о плохой обусловленности свидетельствует уже первый шаг работы алгоритма, так как матрица $N_1=p_1a_i^{\mathrm{T}}a_1+1\cdot10^{-q}$, для которой по рекуррентной формуле вычисляется матрица Q_1, имеет очень большое число обусловленности. Но, например, в нивелирной сети при включении в нее первого неизвестного, матрицы $N_1=p_1+1\cdot10^{-q}$ и $Q_1=1/(p_1+1\cdot10^{-q})$ имеют идеальную обусловленность не зависимо от выбора величины q. Такая же картина имеет место при уравнивании свободных и плановых сетей, так как рекуррентная формула не требует обращения плохо обусловленных матриц. Автору следовало бы ознакомиться с известной теоремой, положенной в основу метода решения некорректных задач линейной алгебры, утверждающей, что при $\delta\to0$ решение системы $(N+\delta^2E)x=b$ даже с вырожденной матрицей N сходится к решению системы $Nx=b$ с минимальной нормой и обладает «устойчивостью по отношению к ошибкам округлений» [1, с. 209]. Доказательство этой теоремы в [1] выполнено именно для рекуррентного способа решения. Можно доказать также, что матрица погрешностей элементов искомой матрицы N^{-1} определяется как $\Delta Q\approx10^{-q}Q^2$.

М. Д. Герасименко в обсуждаемой статье приводит пример уравнивания нивелирного хода с тремя секциями, полагая $Q_0=10^qE$, специально выбирая $q=2$ малой величиной и выполняя вычисления с точностью $\varepsilon=0{,}01$, чтобы показать «преимущество коррелатного способа над параметрическим». Но это ему не удается сделать. Во-первых, матрица Q получается одинаковой в обоих способах, что и должно быть, так как оба способа одинаковы. Во-вторых, тот факт, что вектор неизвестных получается лучше при коррелатном способе, когда он вычисляется по формуле (4), чем при параметрическом способе, когда $\Delta x=-N^{-1}b$ объясняется не недостатком параметрического способа, а неверным выбором вектора приближенных значений высот узловых точек. Он заблуждается, когда пишет, что в линейных задачах его можно выбирать любым. Дело в том, что при рекуррентном уравнивании решается система нормальных уравнений

$$\bar{N}\Delta x+b=0, \tag{8}$$

а не система

$$N\Delta x+b=0,$$

где вектор $b=A^{\mathrm{T}}PL$. Не трудно показать, что матрицу $\bar{N}=N+P^0$ можно представить в виде $\bar{N}=A^{\mathrm{T}}\bar{P}A$, где матрица

$$\bar{P}=P+PAN^{-1}\cdot P_0\cdot N^{-1}A^{\mathrm{T}}P,$$

т. е. свести задачу к уравниванию с приближенными весами. Но тогда вместо (8) следует решать систему

$$\bar{N}\Delta x+\bar{b}=0,$$

где вектор $\bar{b}=A\bar{P}L$. Выбор вектора $X^{(0)}$ может быть произвольным лишь в этом случае, а не в случае (8), но при согласовании с ним точности элементов матрицы N^{-1} и $\bar{N}^{-1}$.

Кроме того, автор заведомо ставит оба способа вычисления вектора неизвестных в неравные условия. Действительно, принимая вектор $X^{(0)}=(0\ 8)^{\text{T}}$, он получает вектор $b=(-8001\ 8009)^{\text{T}}$. В таком случае вычисление матрицы N^{-1} невозможно выполнять с точностью до 0,01. Тогда погрешность вычисления неизвестных может достичь 100 м. При вычислении же неизвестных по формуле (4) величина свободного члена превосходит 8 м и поэтому погрешность вычислений оказывается значительно меньшей.

Не следует забывать также, что обычный (нерекуррентный) параметрический способ нельзя применять, если имеются измерения с очень большими весами. Заметим, что и матрица

$$N^{+}=Q=\begin{pmatrix}0.50 & 0.50\\ 0.50 & 0.50\end{pmatrix}$$

получена автором неверно, так как она на самом деле не является вырожденной и равна (с точностью до $1\cdot10^{-5}$)

$$Q=\begin{pmatrix}0{,}50025 & 0{,}49975\\ 0{,}49975 & 0{,}50025\end{pmatrix}.$$

Таким образом, грубое пренебрежение элементарными правилами техники вычислений, неверный выбор вектора приближенных значений высот узловых точек и заведомое неравенство условий, в которых сопоставляются оба способа вычислений вектора, неизвестных в примере М. Д. Герасименко, приводят к фальсифицированию идеи рекуррентного уравнивания с выбором матрицы Q_0, в которой, согласно с приведенной выше теоремой регуляризованного уравнивания, величина $q\not\to\infty$, и неверному применению формулы обычного параметрического уравнивания. Неуместно также вычисления выполнять с точностью до 0,01, когда вес $p_3=1\cdot10^3$, а обратный вес равен 0,001!

5. Достойно сожаления, что отмеченные недостатки в исследованиях по рассматриваемому вопросу М. Д. Герасименко усугубляет незнанием соответствующих вычислительных приемов, предложенных нами в статьях [5, 6] (не хотелось бы думать о сознательном их замалчивании).

Так, совершенно необоснованно, как мы показали в п. 4, отвергая способ назначения исходной матрицы в виде (7), он [2, с. 15] предлагает в качестве матрицы Q_0 выбирать матрицу $Q_0=p_0E$, т. е. временно фиксируя все неизвестные, а затем их удаляя. Такой вычислительный прием предложен в [5, с. 25] и [6, с. 12], где матрица $Q_0=dE$, причем мы рекомендовали его не только для свободных, но и для любых сетей. Но даже и в этом случае М. Д. Герасименко «предлагает» неэффективный прием решения задачи, так как значительно меньшим объем вычислений будет, если удаление фиксированных измерений выполнять не после учета всех измерений, а сразу после учета необходимых для определения данного неизвестного измерений. Тогда, как показано в [5], удается иметь дело не со всей матрицей Q_{i-1}, а только с ее колонкой, относящейся к этим неизвестным.

Более того, фиксация всех неизвестных вообще не нужна, если выполняется уравнивание нуль-свободных или несвободных сетей, т. е. когда матрица коэффициентов уравнений поправок A столбцово не вырождена. При уравнивании же свободных сетей достаточно зафиксировать лишь d неизвестных (см. пример в [7]). Легко понять, что это значительно сокращает объем вычислений, так как удалять приходится также лишь d измерений. Более того, если веса фиксируемых неизвестных принять равными $p=10^{-q}$, где q — достаточно большое число, то удалять фиксацию вообще не приходится.

Не являются новыми и ряд предложений М. Д. Герасименко по уравниванию свободных сетей с применением рекуррентной формулы.

Таким образом, в статье М. Д. Герасименко не содержится никаких новых предложений, которые содействовали бы применению рекуррентного способа уравнивания. Наоборот, имеются утверждения и выводы, которые могут привести к опасным заблуждениям относительно достоинств этого способа. Искажена и история развития способа из-за неверного представления и оценки собственных разработок.

1. *Альберт А.* Регрессия, псевдообращение и рекуррентное оценивание. М., 1977. 2. *Герасименко М. Д.* Рекуррентное уравнивание геодезических сетей // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1987. Вып. 46. С. 12—18. 3. *Герасименко М. Д.* Многогрупповой коррелатный способ для уравнивания геодезических сетей на ЭВМ // Изв. высш. учеб. завед. Геодезия и аэрофотосъемка. 1977. № 5. С. 57—60. 4. *Маркузе Ю. И.* Анализ и уравнивание геодезических сетей без составления нормальных уравнений // Изв. высш. учеб. завед. Геодезия и аэрофотосъемка. 1981. № 3. С. 3—10. 5. *Маркузе Ю. И.* Способы формирования исходной матрицы при рекуррентном уравнивании // Изв. высш. учеб. завед. Геодезия и аэрофотосъемка. 1985. № 5. С. 18—27. 6. *Маркузе Ю. И.* Обобщенный параметрический способ уравнивания, рекуррентная формула и коллокация // Изв. высш. учеб. завед. Геодезия и аэрофотосъемка. 1985. № 4. С. 3—14. 7. *Маркузе Ю. И.* Способ временной фиксации неизвестных при уравнивании геодезических сетей со свободными блоками // Изв. высш. учеб. завед. Геодезия и аэрофотосъемка. 1986. № 4. С. 13—24. 8. *Муртаф Б.* Современное линейное программирование. М., 1984. 9. *Нейман Ю. М.* О последовательном анализе наблюдений // Изв. высш. учеб. завед. Геодезия и аэрофотосъемка. 1966. № 2. С. 75—80. 10. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применение. М., 1968.

Статья поступила в редколлегию 18. 01. 88