УДК 528.33

М. И. МАРЫЧ

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ МОЛОДЕНСКОГО С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛА СТОКСА

Простой подход к решению задачи Молоденского с точностью ее линеаризации состоит в использовании граничного условия

$$M_s T \equiv -\left(\frac{\partial T}{d\rho'} + \frac{2T}{\rho'}\right)_{\rho' \to \rho} = G_s \quad (1)$$

для возмущающего потенциала $T = T(\rho', \theta, \lambda)$, выражающего аномалии силы тяжести на физической поверхности Земли s с погрешностью порядка ее сжатия [1].

Это условие содержит дифференцирование потенциала по радиусу и на основании разрешимости внешней задачи Дирихле для s приводит к интегралу Стокса

$$T = \frac{R^2}{4\pi} \int D G_s S(\tilde{\rho}', \psi)\, d\omega \quad (2)$$

для внешней сферы с ($R \geqslant \rho_{max}$), которую называют сферой Бриллюэна [4]. Здесь D — оператор преобразования от аномалий G_s к их значениям G_c на сфере, представляемого рядом Тейлора

$$DG_s \equiv G_s - \left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_s H + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \rho^2}\right)_s H^2 - \cdots = G_c$$

по степеням высот $H = \rho - R$ рельефа поверхности s; $\tilde{\rho}' = R + \tilde{H} + z$ — радиус-вектор исследуемой точки P_s, где z есть радиальное расстояние от поверхности s до этой точки. Разложение (2) в ряд Тейлора

$$T_s = T_c + \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_c \tilde{H} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2}\right)_c \tilde{H}^2 + \cdots \quad (3)$$

по степеням высоты, соответствующей исследуемой точке, позволяет определить потенциал во всех точках P_s внешности поверхности s, что обосновывает разрешимость данной задачи.

Следовательно, решение задачи

$$T_s = M_s^{-1} G_s \quad (4)$$

можно рассматривать как объединение преобразований от аномалий G_s к потенциалу

$$T_c = \frac{R^2}{4\pi} \int DG_s S(\tilde{\rho}_0', \psi)\, d\omega$$

в точке P_c, радиус-вектор которой $\tilde{\rho}'_0 = R + z$ ($z \geqslant 0$) и от него к потенциалу в точке P_s, определяющее сумму T_s ряда (3). Принимая во внимание независимость оператора M_s^{-1} от предположения аналитического продолжения потенциала или независимость от сферы c отсчета высот H, можно при определении решения (4) в качестве вспомогательной сферы c принять внутреннюю сферу ($R \leqslant \rho_{\min}$) или сферу радиуса, равного среднему радиусу Земли.

Отметим, что данной трактовке решения (4), отражающей доказательство его существования и единственности, соответствует решение задачи с помощью интеграла (2) и малого параметра Молоденского k ($0 \leqslant k \leqslant 1$), введенного в качестве коэффициента при всех высотах H [2, 3]. Поэтому можно полагать, что ей соответствует и решение с помощью интеграла

$$T = \frac{\tilde{\rho}^2}{4\pi} \int D' G_s S(\tilde{\rho}', \psi)\, d\omega, \tag{5}$$

записанного для сферы c' радиуса $\tilde{\rho} = R + \tilde{H}$ [4, 5]. Что касается предположения аналитического продолжения

$$D' G_s = G_s - \left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_s (H - \tilde{H}) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \rho^2}\right)_s (H - \tilde{H})^2 - \cdots = G_{c'}$$

аномалий G_s на сферу c', пересекающуюся с поверхностью s, то оно не противоречит формулировке задачи и при получении решения (4) допустимо.

С целью дополнительного освещения этого вопроса попытаемся привести два первых члена разложения в ряд Тейлора по степеням k интеграла (5) к соответствующим членам разложения интеграла Стокса для сферы Бриллюэна (2), не содержащего аналитического продолжения вниз аномалий G_s. Для этого введем параметр k и предварительно найдем указанные члены в степенных рядах относительно k для преобразования:

$$D'_R G_s \equiv G_s - \left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_{sk} (H - \tilde{H})\, k + \cdots = G_{c'k},$$

где

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_{sk} = \left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_{s0} + \cdots$$

и для функции

$$\tilde{\rho}^2 S(\tilde{\rho}'_k, \psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\tilde{\rho}_k^{n+2}}{\tilde{\rho}'^{\,n+1}_k} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi),$$

где $\tilde{\rho}_k = R + k\tilde{H}$ и $\tilde{\rho}'_k = R + k\tilde{H} + z$. Имеем

$$D'_k G_s \equiv G_s - \left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_{s0} (H - \tilde{H}) k + \cdots = G_{c'k} \tag{6}$$

и

$$\tilde{\rho}_k^2 S(\tilde{\rho}'_k, \psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R^{n+2}}{\tilde{\rho}_0'^{n+1}} \left[1 + \left(\frac{n+2}{R} - \frac{n+1}{\tilde{\rho}'_0} \right) \tilde{H} k + \cdots \right] \times$$

$$\times \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi). \tag{7}$$

В результате умножения рядов (6) и (7), введенных в (5), после соответствующих преобразований находим разложение интеграла (5) в ряд по степеням k, совпадающее с разложением интеграла (2) [2]:

$$T_k = T_0 + T_1 k + \ldots, \tag{8}$$

где

$$T_0 = \frac{R^2}{4\pi} \int G_s S(\tilde{\rho}'_0, \psi)\, d\omega$$

и

$$T_1 = -\frac{R^2}{4\pi} \int \left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_{s0} \left(H - \frac{R}{\tilde{\rho}'_0} \tilde{H} \right) S(\tilde{\rho}'_0, \psi)\, d\omega + T_0 \frac{\tilde{H}}{\tilde{\rho}'_0}.$$

Следует отметить, что интегралы $\frac{R^2}{4\pi} \int \left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_{s0} \tilde{H} S(\tilde{\rho}'_0, \psi)\, d\omega$ и $\frac{R^2}{4\pi} \int G_s \sum_{n=2}^{\infty} \frac{R^{n-1}(n+2)}{\tilde{\rho}_0'^{n+1}} \tilde{H} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos\psi)\, d\omega$, появившиеся в ходе вывода ряда (8) в связи с заменой преобразования $DG_s = G_c$ формальным аналитическим продолжением $D'G_s = G_{c'}$ аномалий G_s на дополнительную сферу c' в (5), скомпенсировались на основании разложения в ряд сферических функций

$$\left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_{s0} = \frac{1}{2\pi R} \int \frac{G_s - \tilde{G}_s}{8 \sin^3 \frac{\psi}{2}}\, d\omega - \frac{2G_s}{R} = -\frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(G_s)_n$$

нулевого приближения радиальной производной аномалии G_s и свойства ортогональности этих функций.

Принимая во внимание соотношение

$$\frac{R^2}{4\pi} \int \left(\frac{\partial G}{\partial \rho}\right)_{s0} \frac{R}{\tilde{\rho}'_0} \tilde{H} S(\tilde{\rho}'_0, \psi)\, d\omega + T_0 \frac{\tilde{H}}{\tilde{\rho}'_0} = \left(\frac{\partial T_0}{\partial \rho}\right)_c \tilde{H},$$

можно убедиться, что ряд (8) совпадает с разложением ряда (3) по степеням k, представляющим собой разложение

$$T_{s0}+T_{s1}k+\cdots=T_0+\left[-\frac{R^2}{4\pi}\int\left(\frac{\partial G}{\partial\rho}\right)_{s0}HS\,(\tilde{\rho}_0',\psi)\,d\omega+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial T_0}{\partial\rho}\right)_{c}\tilde{H}\right]k+\cdots,$$

а следовательно, и разложение по степеням k

$$T_{s0}+T_{s1}k+\cdots=(M_s^{-1})_0G_s+(M_s^{-1})_1G_sk+\cdots$$

решения (4). При $k=1$ получаем формулы, определяющие возмущающий потенциал T на физической поверхности Земли и вне ее в нулевом $T_{s0}=T_0$, первом $T_{s0}+T_{s1}=T_0+T_1$ и т. д. приближениях Молоденского.

Таким образом, решение задачи Молоденского с граничным условием (1) при помощи малого параметра k так же, как и доказательство существования и единственности ее решения, основано на разрешимости внешней задачи Дирихле для поверхности s и интеграле Стокса.

1. *Марыч М. И.* О решении задачи Молоденского с учетом сжатия Земли // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1987. Вып. 46. С. 61—64. 2. *Марыч М. И.* Об определении внешнего гравитационного поля Земли // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1982. Вып. 36. С. 68—74. 3. *Марыч М. И.* О трактовке решения краевой задачи теории фигуры Земли методом малого параметра // Геодезия, картография и аэрофотосъемка. 1986. Вып. 44. С. 53—57. 4. *Мориц Г.* Современная физическая геодезия. М., 1983. 5. *Нейман Ю. М.* Вариационный метод физической геодезии. М., 1979.

Статья поступила в редколлегию 16. 04. 88