

АНАЛИЗ ФОРМ РЕЛЬЕФА ПО ВТОРОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЕ ПОВЕРХНОСТИ

Перед автоматической классификацией, кластеризацией или распознаванием форм рельефа часто требуются эталоны, например, имеющиеся на анализируемой поверхности формы: холм, впадина, седловина [2, 4]. Автоматически их можно выделить по приведенной ниже методике.

При анализе поверхности $t=f(x, y)$ в экстремальных точках, выбирая локальную систему координат, можно ось z принимать нормальной к поверхности или к касательной плоскости в анализируемой точке, где производные $f_x=f_y=0$. Такая система координат практически не отличается от принятой в топографии или фотограмметрии.

Принимаем, что изучаемая земная поверхность является регулярной, т. е. n раз дифференцируемой и в каждой ее точке имеется окрестность, допускающая регулярную параметризацию. Она описывается уравнениями в параметрической форме $x=f_1(u, v)$, $y=f_2(u, v)$, $z=f_3(u, v)$. Как правило, пользуются векторной записью уравнения поверхности [1]:

$$r=r(u, v)=x(u, v)e_1+y(u, v)e_2+z(u, v)e_3, \quad (1)$$

где e_1, e_2, e_3 — единичные векторы, направленные по осям x, y, z . Функции x, y, z являются регулярными, т. е. n раз непрерывно дифференцируемыми. Если они аналитические, то поверхность называют аналитической. Естественно, что при $n=1$ поверхность гладкая.

Используя частные производные, полученные по конечным разностям, для анализа поверхности можно определить векторное поле градиентов, т. е. вычислить векторы в каждой точке поверхности, проекциями которых будут значения частных производных от $w=w(x, y, z)$ [1]:

$$\text{grad } w = \frac{\partial w}{\partial x}i + \frac{\partial w}{\partial y}j + \frac{\partial w}{\partial z}k. \quad (2)$$

Если $z=f(x, y)$ — функция двух переменных, то вектор $\text{grad } z = \frac{\partial z}{\partial x}i + \frac{\partial z}{\partial y}j$ лежит в плоскости Oxy . Он имеет направление, перпендикулярное линии горизонтали $f(x, y)=c$, которая лежит в плоскости Oxy и проходит через исследуемую точку. Угловым коэффициентом данной горизонтали

$$x_1 = \frac{\partial z}{\partial x} / \frac{\partial z}{\partial y}. \quad (3)$$

А угловой коэффициент градиента в этой же точке

$$\gamma_2 = \frac{\partial z}{\partial y} / \frac{\partial z}{\partial x}. \quad (4)$$

Вычисленный градиент, как и частные производные, можно использовать только для нахождения положения экстремальных точек и характерных линий поверхности, а в конечном итоге структурных линий рельефа. Если задан вектор ρ с направляющими косинусами $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, то для функции $w = w(x, y, z)$

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial w}{\partial z} \cos \gamma. \quad (5)$$

Отсюда, зная частные производные вдоль принятых координатных осей, легко найти производные по любому направлению, так как частные производные являются частным случаем производной по направлению. Если $\alpha=0$, $\beta=\pi/2$, $\gamma=\pi/2$, то $dw/d\rho = dw/dx$. При $\alpha=\pi/2$, $\beta=0$, $\gamma=\pi/2$ $dw/d\rho = dw/dy$.

Для дальнейшего анализа экстремальных точек рельефа необходимо вычислить частные производные второго порядка.

Существует теорема, согласно которой для $z=f(x, y)$

$$f_{xy} = f_{yx}. \quad (6)$$

Она распространяется на производные более высоких порядков и на функции любого числа переменных. Используя высказанные выше положения, приступим к дальнейшему анализу.

Ряд вопросов теории поверхности, в частности оценка степени изогнутости, решается с использованием квадратичных форм поверхности.

В дифференциальной геометрии известны три квадратичные формы, связанные с поверхностью. Первая квадратичная форма [1]

$$I = dr^2 = (r_u du + r_v dv)^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad (7)$$

где вектор r представляет собой регулярную параметризацию поверхности $r=r(u, v)$, $E=r_u^2$, $F=r_u r_v$, $G=r_v^2$.

Эта форма всегда принимает неотрицательные значения и обращается в нуль при $du=dv=0$. Однако первая квадратичная форма при изгибании поверхности не изменяется, поэтому она представляет малый интерес при анализе степени изогнутости рельефа.

Пусть $n(u, v)$ — единичный вектор нормали к поверхности $r=r(u, v)$ в точке $P(u, v)$. Тогда вторую квадратичную форму описываем выражением

$$II = -drdn. \quad (8)$$

Третья квадратичная форма имеет вид

$$III = dn^2. \quad (9)$$

Наибольший интерес представляет вторая квадратичная форма. Для коэффициентов этой формы принято употреблять следующие обозначения:

$$-r_{uu} = L, \quad -r_{uv} = M, \quad -r_{vv} = N. \quad (10)$$

Для поверхности $z=f(x, y)$ в окрестности точки 0 первую квадратичную форму можно представить в виде $dr^2 = dx^2 + dy^2$.

Вторая квадратичная форма

$$-drdn = f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2. \quad (11)$$

Пусть поверхность задана уравнением $z=f(x, y)$ в специальных координатах, где ось z направлена перпендикулярно к касательной плоскости к поверхности в точке $O(x_0, y_0, z_0)$, а оси x и y ей параллельны. В точке $z_0=f(x_0, y_0)$, в которой

$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0, y=y_0} = 0$ и в которой выполняем анализ второй квадратичной формы, дифференциальное уравнение линии кривизны имеет вид

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

Если координатные линии на поверхности совпадают с линиями кривизны, то коэффициенты F и M в (12) равны нулю. Любую точку поверхности, если она не точка шара или точка уплощения, всегда можно параметризовать так, что координатные линии будут линиями кривизны.

Существует формула Эйлера для нормальной кривизны в произвольном направлении

$$k_\theta = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta, \quad (13)$$

где k_1 и k_2 — главные кривизны; θ — направление, вдоль которого определяется кривизна. Однако в случае любого параметрического задания поверхности k_1 и k_2 можно определить, как корни квадратного уравнения

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0; \quad (14)$$

$$k^2(EG - F^2) - k(LG - 2MF - NE) + (LN - M^2) = 0. \quad (15)$$

Средняя кривизна поверхности в анализируемой точке соответствует полусумме главных кривизн:

$$H = (k_1 + k_2)/2, \quad (16)$$

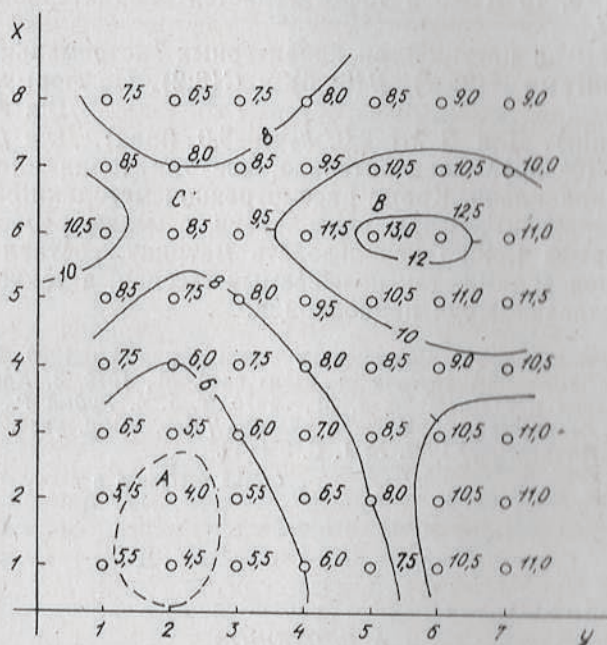
а гауссова кривизна — их произведению $K = k_1 k_2$.
Если поверхность представлена функцией $z=f(x, y)$, то

$$L = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \quad M = \frac{f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \quad N = \frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$E = 1 + f_x^2, \quad F = f_x f_y, \quad G = 1 + f_y^2, \quad (18)$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{(1+f_y)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1+f_x)f_{yy}}{(1+f_x^2+f_y^2)^{3/2}},$$

$$K = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{1+f_x^2+f_y^2}.$$



Фрагмент изображения рельефа.

Подставим (18) в (15). Получим следующее уравнение:

$$k^2(1+f_x^2+f_y^2) - k \frac{f_{xx} + f_y^2 f_{xx} - 2f_{xy}f_x f_y + f_{yy} + f_x^2 f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} +$$

$$+ \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{1+f_x^2+f_y^2} = 0. \quad (19)$$

Так как в точке, подозреваемой на экстремум, $f_x = f_y = 0$, то последнее выражение приводим к виду

$$k^2 - k(f_{xx} + f_{yy}) + f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0. \quad (20)$$

Приведем из [3] выражения для оценок частных производных:

$$f_{xx} \cong \Delta^{2+0} + \dots \quad f_{yy} \cong \Delta^{0+2} + \dots \quad f_{yx} \cong f_{xy} \cong \Delta^{1+1} + \dots, \quad (21)$$

где Δ^{m+n} — конечные разности, в которых первый верхний индекс m обозначает порядок вдоль оси x , а второй n — порядок вдоль оси y . Подставив (21) в (20), получим уравнение

$$k^2 - k(\Delta^{2+0} + \Delta^{0+2}) + \Delta^{2+0}\Delta^{0+2} - (\Delta^{1+1})^2 = 0. \quad (22)$$

Из дифференциальной геометрии известно, что в экстремальной точке, если $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, то $K > 0$ и точка является наивысшей точкой холма; если $k_1 < 0$, $k_2 < 0$, то $K > 0$ и точка является наинизшей точкой впадины; если $k_1 > 0$, $k_2 < 0$ или $k_1 < 0$, $k_2 > 0$, то $K < 0$ и точка является характерной точкой седловины.

Выберем на рисунке три характерных экстремальных точки с координатами $A(2; 2)$, $B(6; 5)$ и $C(6; 2)$. По формулам (22) вычислены для взятых точек главные кривизны. Для A $k_1 = 2,0$, $k_2 = 3,0$ (min). Для B $k_1 = 2,0$, $k_2 = -5,0$ (max). Для C $k_1 = 3,0$, $k_2 = -1,5$ (седло). Следовательно, все три точки классифицировались правильно. Кроме рассмотренной методики с применением квадратичных форм поверхности, с целью распознавания форм рельефа можно использовать матрицу, составленную со вторых производных, так называемый гессиан, а также уравнение соприкасающегося параболоида.

1. Дубровный Б. А. Современная геометрия. М., 1986. 2. Дуда Р., Харт П. Распознавание образов и анализ сцен. М., 1976. 3. Крылов В. И. Вычислительные методы. В 2-х т. М., 1976. Т. 1. 4. Рудый Р. М. Выбор признаков для классификации форм рельефа // Изв. высш. учеб. завед. Геодезия и аэрофотосъемка. 1987. № 1. С. 35—39.