УДК 528.13+517.5

З. П. ТАМУТИС

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНА ИЗМЕРЕНИЙ

Рассмотрим определение одинаковой точности измерений для каждой группы разнородных элементов сети. Решим сначала эту задачу при заданной точности искомых параметров сети и минимальном объеме трудовых затрат. Под затратами понимаем затраченное на измерение время или стоимость произведенных измерений.

Известно [2], что

$$m^2_{f_j} = \sum_{i=1}^{n} b^2_{ji} \frac{\mu_i^2}{n_i^*}, \quad j = \overline{1, s}, \tag{1}$$

где μ_i — средняя квадратическая ошибка однократного измерения элемента l_i сети; n_i^* — число наблюдений элемента l_i; m_{f_j} — средняя квадратическая ошибка функции; b_{ij} — элемент матрицы

$$B = -F(A^T PA)^{-1} A^T P = \overline{F}\{E - P^{-1} C^T (CP^{-1}C^T)^{-1} C\}. \tag{2}$$

Здесь P — диагональная матрица весов измеряемых величин; A — матрица уравнений поправок; C — матрица условных уравнений поправок; E — единичная матрица; F — прямоугольная $(s \times t)$-мерная матрица коэффициентов весовых функций, где s — число весовых функций, а t — число необходимых неизвестных; $\overline{F}$ — прямоугольная $(s \times n)$-мерная матрица коэффициентов весовых функций, где n — число измеряемых величин.

Представим уравнение (1) в таком виде:

$$m^2_{f_j} = \frac{\mu_\beta^2}{n_1^*} \sum_{i=1}^{n_1} b^2_{ji} + \frac{\mu_s^2}{n_2^*} \sum_{k=1}^{n_2} b^2_{jk}, \tag{3}$$

где μ_β — средняя квадратическая ошибка однократного измерения угла; μ_s — средняя квадратическая ошибка однократного измерения линии; n_1^* — число повторения измерений угла; n_2^* — число повторения измерений линии; n_1 — число измеряемых углов в сети; n_2 — число измеряемых линий.

Согласно [3], трудовые затраты k_i, необходимые для измерения элемента l_i сети, представим в виде

$$k_i = k_{0,i} + n_i^* k_i^*, \tag{4}$$

где $k_{0,i}$ — затраты на подготовительные работы к измерению элемента l_i сети; k_i^* — затраты для однократного измерения того же элемента.

Трудовые затраты для измерения одного угла, согласно (4),

$$k_1 = k_{0,1} + n_1^* k_1^* \tag{5}$$

и одной линии

$$k_2 = k_{0,2} + n_2^* k_2^*, \tag{6}$$

где $k_{0,1}$ и $k_{0,2}$ — затраты на подготовительные работы к измерению соответственно угла и линии; k_1^* и k_2^* — затраты для однократного измерения угла и линии.

Отсюда получим

$$\Pi_1^* = \frac{k_1 - k_{0,1}}{k_1^*} = \frac{K_1}{k_1^*} \tag{7}$$

и

$$\Pi_2^* = \frac{k_2 - k_{0,2}}{k_2^*} = \frac{K_2}{k_2^*}. \tag{8}$$

Заменяя в (3) n_1^* и n_2^* их выражениями, согласно (7) и (8), имеем

$$m^2_{f_j} = \frac{\mu_\beta^2 k_1^*}{K_1} \sum_{i=1}^{n_1} b^2_{ji} + \frac{\mu_s^2 k_2^*}{K_2} \sum_{k=1}^{n_2} b^2_{jk}. \tag{9}$$

В (9) переменными величинами являются K_1 и K_2. Потребуем определить их так, чтобы выполнялось условие

$$z = n_1 k_1 + n_2 k_2 = \min.$$

Так как k_1 и k_2 должны удовлетворять еще уравнению (9), то ищем минимум функции

$$Z = n_1 k_1 + n_2 k_2 + \lambda \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\mu_\beta^2 k_1^*}{K_1} \sum_{i=1}^{n_1} b^2_{ji} + \frac{\mu_s^2 k_2^*}{K_2} \sum_{k=1}^{n_2} b^2_{jk} - m^2_{f_j} \right).$$

Частные производные от функции Z относительно k_1 и k_2 имеют вид

$$\frac{\partial Z}{\partial k_1} = n_1 - \lambda \frac{\mu_\beta^2 k_1^*}{K_1^2} \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{n_1} b^2_{ji}$$

и

$$\frac{\partial Z}{\partial k_2} = n_2 - \lambda \frac{\mu_s^2 k_2^*}{K_2^2} \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{n_2} b^2_{jk}.$$

Из уравнений $\frac{\partial Z}{\partial k_1} = 0$ и $\frac{\partial Z}{\partial k_2} = 0$ получаем

$$K_1^2 = \lambda \frac{\mu_\beta^3 k_1^*}{n_1} \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{n_1} b^2_{ji}$$

и

$$K_2^2 = \lambda \frac{\mu_s^2 k_2^*}{n_2} \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{n_2} b^2_{jk}.$$

Дальше

$$\frac{K_1^2}{K_2^2}=\frac{\mu_\beta^2 k_1^* n_2 \sum\limits_{j=1}^{s}\sum\limits_{i=1}^{n_1} b_{ji}^2}{\mu_s^2 k_2^* n_1 \sum\limits_{j=1}^{s}\sum\limits_{k=1}^{n_2} b_{jk}^2}. \tag{10}$$

Так как, согласно (7) и (8),

$$K_1/K_2=n_1^* k_1^*/n_2^* k_2^*, \tag{11}$$

то с учетом (11) формулу (10) перепишем как

$$\frac{n_1^{*2}}{n_2^{*2}}=\frac{\mu_\beta^2 k_2^* n_2 \sum\limits_{j=1}^{s}\sum\limits_{i=1}^{n_1} b_{ji}^2}{\mu_s^2 k_1^* n_1 \sum\limits_{j=1}^{s}\sum\limits_{k=1}^{n_2} b_{jk}^2}.$$

Отсюда

$$\frac{n_1^*}{n_2^*}=\frac{\mu_\beta}{\mu_s}\sqrt{\frac{k_2^* n_2 \sum\limits_{j=1}^{s}\sum\limits_{i=1}^{n_1} b_{ji}^2}{k_1^* n_1 \sum\limits_{j=1}^{s}\sum\limits_{k=1}^{n_2} b_{jk}^2}}.$$

Введем обозначение

$$g=\frac{\mu_\beta}{\mu_s}\sqrt{\frac{k_2^* n_2 \sum\limits_{j=1}^{s}\sum\limits_{i=1}^{n_1} b_{ji}^2}{k_1^* n_1 \sum\limits_{j=1}^{s}\sum\limits_{k=1}^{n_2} b_{jk}^2}}. \tag{12}$$

С учетом обозначения (12) получим

$$n_1^*=gn_2^*. \tag{13}$$

Суммируя левые и правые части уравнений (3), имеем

$$\sum_{j=1}^{s} m^2_{\gamma_j}=\frac{\mu_\beta^2}{n_1^*}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_1} b_{ji}^2+\frac{\mu_s^2}{n_2^*}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n_2} b_{jk}^2. \tag{14}$$

Заменяя n_1^* в (14) выражением согласно (13), записываем

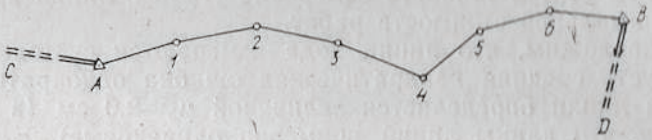
$$\sum_{j=1}^{s} m^2_{\gamma_j}=\frac{1}{n_2^*}\left\{\frac{\mu_\beta^2}{g}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_1} b_{ji}^2+\mu_s^2\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n_2} b_{jk}^2\right\}.$$

Отсюда

$$n_2^* = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{s} m_{f_j}^2} \left\{ \frac{\mu_\beta^2}{g} \sum_{j=1}^{s} \sum_{l=1}^{n_1} b_{jl}^2 + \mu_s^2 \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{n_2} b_{jk}^2 \right\}. \qquad (15)$$

Определив n_2^*, по формуле (13) получим и n_1^*.

Нетрудно видеть, что вторые производные от функции Z по переменным k_1 и k_2 больше нуля. Поэтому стоимость измерений



Полигонометрический ход.

при n_1^* и n_2^*, вычисленных по формулам (13) и (15), действительно минимальна.

В случае, когда $s=1$, формула (15) принимает вид

$$n_2^* = \frac{1}{m_f^2} \left\{ \frac{\mu_\beta^2}{g} \sum_{l=1}^{n_1} b_l^2 + \mu_s^2 \sum_{k=1}^{n_2} b_k^2 \right\},$$

а (12)

$$g = \frac{\mu_\beta}{\mu_s} \sqrt{\frac{k_2^* n_2 \sum\limits_{l=1}^{n_1} b_l^2}{k_1^* n_1 \sum\limits_{k=1}^{n_2} b_k^2}}. \qquad (16)$$

Для иллюстрации изложенного возьмем полигонометрический ход, изображенный на рисунке (пример взят из работы [2]). Требуется определить точность измерения углов и линий при заданной точности положения точки № 4 хода.

Для упрощения расчетов повернем координатные оси так, чтобы ось ординат совпала с замыкающей хода. При таком положении осей координат и вытянутом полигонометрическом ходе Q_{xx} будет зависеть только от угловых измерений, Q_{yy} — только от линейных измерений, а Q_{xy} — будет равно нулю. Поэтому принимая $P_\beta = E_\beta$ и $P_s = E_s$, по формуле (2) вычисляем матрицу B для координат точки № 4 хода.

Итак, при s, выраженном в сантиметрах, и ρ — в секундах, для хода на рисунке имеем

$$B = \bar{F}\{E - C^T (CC^T)^{-1} C\} =$$

$$= 10^{-3} \begin{bmatrix} -79 & -23 & 17 & 51 & 108 & 41 & -23 & -90 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 428 & 428 & 428 & 428 & -572 & -572 & -572 \end{bmatrix}.$$

Дальше при условиях одинаковой точности измерения углов и одинаковой точности измерения линий получим

$$M_4^2 = m_{x_4}^2 + m_{y_4}^2 = 0{,}0316\, m_\beta^2 + 1{,}71\, m_s^2, \tag{17}$$

где m_{x_4} и m_{y_4} вычислены по формуле (1).

Из формулы (17) при заданном значении M_4 и m_β можно найти m_s и, наоборот, при заданном M_4 и m_s можно получить m_β. Так, при $M_4 = 2{,}5$ см, $m_\beta = 10''$ имеем $m_s = 1{,}34$ см.

Найдем теперь точность измерения углов и линий при условии минимальной стоимости работ.

Предположим, что линии хода измеряются светодальномером. Пусть средняя квадратическая ошибка однократного измерения линии определяется величиной $\mu_s = 2{,}0$ см (в предположении, что длины линий примерно одинаковые), а угла — $\mu_\beta = 10''$.

Число измеряемых углов и линий $n_1 = 8$, $n_2 = 7$.

Согласно [1], получим $k_2^*/k_1^* = 3{,}74/1{,}38 = 2{,}71$.

Теперь по формуле (12), поскольку $\sum\limits_{j=1}^{s} \sum\limits_{i=1}^{n_1} b_{ji}^2 = 0{,}0316$, а $\sum\limits_{j=1}^{s} \times$ $\times \sum\limits_{k=1}^{n_2} b_{jk}^2 = 1{,}71$, имеем

$$g = 1{,}047.$$

По формуле (15) при заданной

$$M_4 = \sqrt{\sum_{j=1}^{s} m_j^2} = 2{,}5 \text{ см}$$

получим $n_2^* = 1{,}58$, а по формуле (13) — $n_1^* = 1{,}65$.

Из формулы $m_i = \mu_i / \sqrt{n_i^*}$ следует, что при необходимости определить положение средней точки хода относительно твердых точек со средней квадратической ошибкой, равной 2,5 см ($M = 2{,}5$ см), и минимальной стоимостью измерений углы надо измерять со средней квадратической ошибкой $m_\beta = 7{,}8''$, а линий $m_s = 1{,}59$ см.

Определим теперь оптимальный план измерений отдельно для углов и линий при условии получения искомых параметров сети с максимальной точностью и заданном объеме трудовых затрат.

Задачу сформулируем так.

Найти k_1 и k_2, минимизирующие функцию

$$z = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\mu_\beta^2 k_1^*}{K_1} \sum_{i=1}^{n_1} b_{ji}^2 + \frac{\mu_s^2 k_2^*}{K_2} \sum_{k=1}^{n_2} b_{jk}^2 \right) \tag{18}$$

при ограничениях

$$n_1 k_1 + n_2 k_2 = c, \ k_1 \geqslant 0, \ k_2 \geqslant 0. \tag{19}$$

Так как неизвестные k_1 и k_2 должны удовлетворять условиям (18) и (19), то ищем минимум такой функции:

$$Z=\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\mu_\beta^2 k_1^*}{K_1}\sum_{i=1}^{n_1} b_{ji}^2+\frac{\mu_s^2 k_2^*}{K_2}\sum_{k=1}^{n_2} b_{jk}^2\right)+\lambda\left(n_1 k_1+n_2 k_2-c\right).$$

Далее получим

$$\frac{\partial Z}{\partial k_1}=-\frac{\mu_\beta^2 k_1^*}{K_1^2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_1} b_{ji}^2+\lambda n_1=0 \tag{20}$$

и

$$\frac{\partial Z}{\partial k_2}=-\frac{\mu_s^2 k_2^*}{K_2^2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n_2} b_{jk}^2+\lambda n_2=0. \tag{21}$$

Из (20) и (21) имеем

$$K_1^2=\frac{\mu_\beta^2 k_1^*}{\lambda n_1}\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_1} b_{ji}^2\ ,$$

и

$$K_2^2=\frac{\mu_s^2 k_2^*}{\lambda n_2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n_2} b_{jk}^2\ .$$

Отсюда

$$\frac{K_1^2}{K_2^2}=\frac{\mu_\beta^2 k_1^* n_2\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{n_1} b_{ji}^2}{\mu_s^2 k_2^* n_1\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{n_2} b_{jk}^2},$$

т. е. имеем соотношение (10).

Затем находим соотношение $n_1^*=gn_2^*$, где g определяется формулой (12) или (16).

Учитывая обозначения (5) и (6), соотношение (19) перепишем так: $n_1(k_{0,1}+n_1^*k_1^*)+n_2(k_{0,2}+n_2^*k_2^*)=c$.

Отсюда

$$n_2^*=\frac{c_1}{n_1 g k_1^*+n_2 k_2^*},$$

где

$$c_1=c-n_1k_{0,1}-n_2k_{0,2}.$$

Практическая реализация этого алгоритма обусловливается достаточно точным определением постоянного c_1.

1. Единые нормы времени и расценки на проектные и изыскательские работы. М., 1980. 2. *Тамутис З. П.* Оптимальные методы проектирования геодезических сетей. М., 1979. 3. *Köhr J.* Die Optimierung von Meßsungen auf Kostengrundlage // Zeitschrift. für Vermessungswesen. 1967. Bd. 92. № 3. S. 92—97.

Статья поступила в редколлегию 29. 02. 88