

УДК 528.92

Х.В. Бурштинська

Національний університет "Львівська політехніка"

КОЛОКАЦІЯ З УМОВАМИ У ЦИФРОВОМУ МОДЕЛЮВАННІ РЕЛЬЄФУ

© Бурштинська Х.В., 2002

Рассмотрены теоретические вопросы построения цифровых моделей рельефа с использованием колокационной модели. Указывается, что математические зависимости колокации и метода Крайгинга идентичны. Обращено внимание на основные проблемы цифрового моделирования рельефа на основе колокационной модели.

There have been done theoretical studies of the digital elevation model using a collocation model. In particular there is indicated that mathematical dependences of the collocation and the Kriging method are identical. Also main problems have been examined for the digital relief simulation based on the collocation model.

Автоматизація картографічного процесу, застосування ГІС-технологій з метою ефективного використання інформації та оперативного прийняття рішень пов'язані із побудовою цифрових моделей рельєфу. Значний ріст робіт та кількості публікацій у сфері цифрового моделювання рельєфу зумовили до виділення питань цифрового моделювання у самостійний напрям. Із чинників, від яких залежить точність побудови цифрових моделей рельєфу, можна виділити такі:

- способи задання вихідної інформації;
- методи математичного моделювання рельєфу;
- технологічні особливості створення ЦМР.

Одним із головних питань створення ЦМР є математичне моделювання рельєфу, розв'язок якого базується на розгляді рельєфу або як явища детермінованого, або випадкового [2, 8], хоча, на нашу думку, оперування з властивостями рельєфу, детермінованими чи статистичними, залежить від критеріїв побудови ЦМР, зокрема точності. Рельєф можна розглядати як випадкову стаціонарну функцію у межах значного її поширення, яка на локальній ділянці виказує детерміновані ознаки. На рис. 1 показано реалізацію випадкової функції за певним напрямком, яка має властивості нестационарності.

Завданням апроксимування є підбір математичної моделі, яка б за вихідною інформацією з заданою точністю відтворювала вихідну функцію. На наш погляд, розв'язанню цієї задачі найбільше відповідає модель колокації, запропонована Moritz [7] для задач фізичної геодезії. Покажемо її особливості для побудови ЦМР. Водночас покажемо, що вживана у практиці побудови ЦМР модель з назвою Крайгінг [1, 4, 5, 8, 10] є вивіреною моделлю колокації. Стосовно визначення ЦМР основне рівняння колокації запишеться

$$Z = Ax + \delta Z + \Delta Z, \quad (1)$$

де Ax визначає регулярну змінну частину або тренд, δZ – сигнал, змінну складову, яка нерегулярно осцилює навколо Ax і ΔZ – випадкову складову або шум.

На рис. 1 показано: 1 – детермінована функція; 2 – випадкова функція; 3 – детерміноване значення функції Ax ; 4 – сигнал δZ ; 5 – шум ΔZ ; 6 – точки, в яких функція задана.

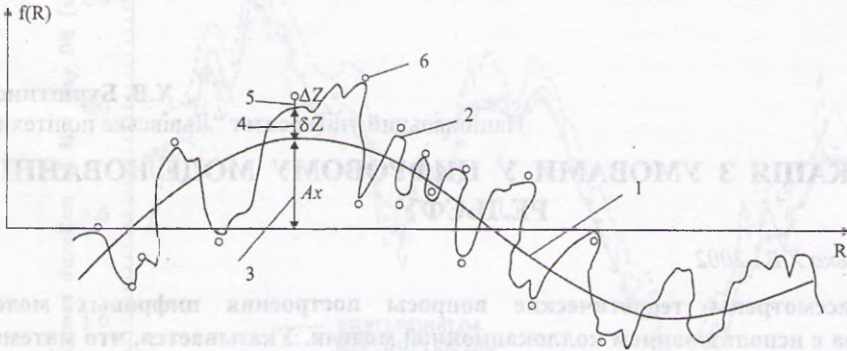


Рис. 1. Зміст моделі колокації в побудові ЦМР

У моделі колокації для отримання незміщених оцінок з мінімальною дисперсією математичне сподівання повинно дорівнювати $E(\delta Z) = 0$, $E(\Delta Z) = 0$.

На відміну від вживаних для апроксимації рельєфу аналітичних функцій, які моделюють тренд або тренд і сигнал разом, за методом колокації сигнал визначається як окрема величина як в точках спостереження, так і в прогнозованих точках, тобто колокація передбачає визначення оцінок параметрів, величин сигналів у точках спостереження і в точках визначення або прогнозу.

Для отримання розв'язку з мінімальними дисперсіями помилок повинні бути задані коваріаційні матриці вимірюного вектора C_{ZZ} , сигналу $C_{\delta Z \delta Z}$ і взаємна коваріаційна матриця сигналів вимірювання δZ і прогнозу $\delta Z_p - C_{\delta Z \delta Z_p}$, а також коваріаційна матриця шуму $C_{\Delta Z \Delta Z}$.

Розв'язок рівняння (1) за принципом

$$\delta Z^T C_{\delta Z \delta Z}^{-1} \delta Z + \Delta Z^T C_{\Delta Z \Delta Z}^{-1} \Delta Z = \min \quad (2)$$

дає оцінки для x і δZ .

$$\hat{x} = (A^T C^{-1} A)^{-1} A^T C^{-1} Z, \quad (3)$$

$$\hat{\delta Z} = C_{\delta Z \delta Z} C^{-1} (Z - A \hat{x}), \quad (4)$$

$$\delta Z_p = C_{\delta Z \delta Z_p} C^{-1} (Z - A \hat{x}), \quad (5)$$

де $C = C_{ZZ} = C_{\delta Z \delta Z} + C_{\Delta Z \Delta Z}$.

Проблемою колокації є отримання коваріаційних функцій, які залежать від типів рельєфу місцевості. Коваріаційну функцію можна отримати, враховуючи теорію стаціонарних випадкових функцій. Якщо задатися значеннями просторової змінної Z в точках поля з координатами x і $x+h$, де h – змінний інтервал, то

$$C(h) = E\{[Z(x) - E_z][Z(x+h) - E_z]\}, \quad (6)$$

де $Z(x)$, $Z(x+h)$ – значення просторової змінної Z в точках поля з координатами x і $x+h$; $E_z = E\{Z(x)\}$ – середнє значення змінної Z в межах поля.

Експериментальні коваріаційні функції можна моделювати за допомогою стандартних виразів коваріаційних функцій [1], що вимагає спеціальних досліджень.

Іншою проблемою застосування теорії колокації для побудови ЦМР є нестационарність випадкової функції. Тому результатом пошуку розв'язання є виділення тренду, який

інтерпретують як математичне сподівання $m_x = E_z$ нестационарної випадкової функції. Тоді локальні відхилення $l(x) = Z(x) - E_z$ розглядають як випадкову функцію з умовами стаціонарності.

Найчастіше тренд представляють за допомогою поліномів. У скороченому запису

$$Ax = E_z = \sum_{l=0}^m a_l f^l(x, y), \quad (7)$$

де a_l – коефіцієнти полінома; $f^l(x, y)$ – одночлени координат x, y точки поля.

Оскільки виключення тренду на глобальній поверхні не забезпечить стаціонарності в межах локальних ділянок, то вибір розмірів таких ділянок, в межах яких можна забезпечити точність визначення відміток, є також проблемою цифрового моделювання.

У випадку, якщо в межах локальної ділянки функцію, яка характеризує рельєф, можна вважати стаціонарною, задачу прогнозу в заданій точці $Z(x_k)$ за вимірними значеннями $Z(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ невідомої випадкової функції ділянки формують як лінійний функціонал

$$L_z = \sum_{i=1}^n W_i Z(x_i) - Z(x_k), \quad (8)$$

параметри якого характеризують усереднене значення коефіцієнта для i -го перетину поля і визначаються за м.н.к. Основним критерієм ефективності оцінки $Z(x_k)$ є дисперсія

$$\sigma_{z_k}^2 = E \left\{ \sum_{i=1}^n W_i Z(x_i) - Z(x_k) \right\}^2, \quad (9)$$

яка за фіксованого значення координат може змінюватись через зміну коефіцієнтів W_i . Коефіцієнти W_i виконують роль усереднених вагових коефіцієнтів.

Якщо виразити дисперсію через коваріаційну функцію, то за правилами оперування з коваріаційними функціями вираз (9) з урахуванням (6) запишемо

$$\sigma_{z_k}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i W_j C(h_{ij}) - 2 \sum_{i=1}^n W_i C(h_{ik}) + C_k, \quad (10)$$

де $C(h_{ij})$ – коваріація між парами точок i -го і j -го перетинів поля, розташованих на відстані $h_{ij} = |x_i - x_j|$; $C(h_{ik})$ – коваріація між i -ми і k -ми парами точок; C_k – дисперсія поля для точок з координатами x_k .

Особливість колокаційної моделі з умовами полягає в тому, що задають умову незміщеності оцінки $Z(x_k)$ стосовно вихідних даних. Умова має такий вигляд:

$$\sum_{i=1}^n W_i = 1. \quad (11)$$

У цьому випадку невідомі вагові коефіцієнти знаходять із розв'язання систем рівнянь безпосередніх вимірів, зв'язаних умовами [6]. У нашому випадку з урахуванням (11) функція Лагранжа запишеться

$$F = \sigma_{z_k}^2 + 2\lambda \left(\sum_{i=1}^n W_i - 1 \right) = \min, \quad (12)$$

де λ – корелата Лагранжа.

Підставляючи (10) в (12), отримаємо

$$C_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n W_i W_j C(h_{ij}) - 2 \sum_{i=1}^n W_i C(h_{ik}) + 2\lambda \left(\sum_{i=1}^n W_i - 1 \right) = 0. \quad (13)$$

Диференціюючи функцію по невідомим коефіцієнтах W_i і кореляті λ , отримаємо $n+1$ рівнянь

$$\sum_{j=1}^n W_j C(h_{ij}) - 2C(h_{ik}) + 2\lambda = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n W_i = 1. \quad (14)$$

В остаточному вигляді рівняння (14) запишемо

$$\sum_{j=1}^n W_j C(h_{ij}) + \lambda = C(h_{ik}),$$

$$\sum_{i=1}^n W_i = 1. \quad (15)$$

З урахуванням математичного сподівання вираз (9) запишемо

$$\sigma_{Z_k}^2 = E \left\{ \left[\sum_{i=1}^n W_i (Z(x_i) + m_{x_i}) - (Z(x_k) + m_{x_k}) \right]^2 \right\}. \quad (16)$$

Якщо m_x виразити за допомогою полінома

$$m_x = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2 + a_5 xy, \quad (17)$$

функція Лагранжа запишеться у вигляді:

$$F = \sigma_{Z_k}^2 + 2\lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n W_i - 1 \right) + 2\lambda_2 \left(\sum_{i=1}^n W_i x_i - x_k \right) + 2\lambda_3 \left(\sum_{i=1}^n W_i y_i - y_k \right) + 2\lambda_4 \left(\sum_{i=1}^n W_i x_i^2 - x_k^2 \right) +$$

$$2\lambda_5 \left(\sum_{i=1}^n W_i y_i^2 - y_k^2 \right) + 2\lambda_6 \left(\sum_{i=1}^n W_i x_i y_i - x_k y_k \right) = \min. \quad (18)$$

Диференціюючи функцію (18) по невідомим W_i і корелятах λ (кореляти відповідають коефіцієнтам полінома), після певних спрощень отримаємо $n+m+1$ рівнянь

$$\sum_{j=1}^n W_j C(h_{ij}) + \lambda_1 + \lambda_2 x_i + \lambda_3 y_i + \lambda_4 x_i^2 + \lambda_5 y_i^2 + \lambda_6 x_i y_i = C(h_{ik})$$

$$\sum_{i=1}^n W_i = 1 \quad \sum_{i=1}^n W_i x_i = x_k$$

$$\sum_{i=1}^n W_i y_i = y_k \quad \sum_{i=1}^n W_i y_i^2 = y_k^2$$

$$\sum_{i=1}^n W_i x_i^2 = x_k^2 \quad \sum_{i=1}^n W_i x_i y_i = x_k y_k \quad (19)$$

Через складність отримання коваріаційних функцій для різних типів рельєфу в практиці побудови ЦМР використовують видозмінену колокаційну модель, звану як метод Крайгінга.

В Крайгінгу, як узагальнену функцію, яка виражає синтезовані властивості поля, використовують функцію розсіювання або варіограму, яку визначають через значення просторової змінної [2, 3, 9]:

$$\gamma(h) = 0,5E\{[Z(x+h) - Z(x)]^2\} \quad (20)$$

або

$$\gamma(h) = C(0) - C(h). \quad (21)$$

За відсутності систематичної складової (тренду) запишемо рівняння Крайгінга у загальному вигляді, замінивши значення коваріаційної функції n значеннями варіограми:

$$\sum_{j=1}^n \gamma_{ij} W_j + \lambda = \gamma_{ki}, \quad (22)$$

$$\sum_{i=1}^n W_i = 1.$$

Порівняємо вирази (22) і (15) – вони ідентичні, але в практичному використанні залежать від достовірності визначення коваріацій $C(h)$ і варіаційних значень $\gamma(h)$.

У матричній формі рівняння (22) мають вигляд

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \\ - & - & - & - \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ - \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \dots \\ W_n \\ - \\ \lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma_{k1} \\ \gamma_{k2} \\ \dots \\ \gamma_{kn} \\ - \\ 1 \end{vmatrix}. \quad (23)$$

Розв'язок системи рівнянь (23) запишемо

$$\begin{vmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \dots \\ W_k \\ \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_{k1} & \gamma_{k2} & \dots & \gamma_{kn} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}^T \cdot \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} & 1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}^{-1}. \quad (24)$$

Значення відмітки k -ї точки знаходимо за вектором вихідних точок із виразу (8)

$$Z_k = \begin{vmatrix} Z_1 & Z_2 & \dots & Z_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \dots \\ W_n \end{vmatrix}. \quad (25)$$

З використанням множника Лагранжа дисперсію оцінки прогнозованої величини запишемо [5]

$$\sigma_{Z_k}^2 = \sum_{j=1}^n W_j \gamma_{kj} + \lambda. \quad (26)$$

Якщо модельована поверхня містить систематичну компоненту (тренд), то вищенаведена модель, внаслідок невиконання вихідної умови (1), буде наближеною. Для точнішого моделювання поверхні з використанням метода Крайгінга необхідно знати функцію апроксимування тренду і узагальнену коваріаційну функцію $C(h)$, яка характеризує автокореляцію даних за відсутності тренду.

Крайгінг за наявності тренду названий універсальним Крайгінгом, його можна використати для розв'язання задач, які не відповідають умовам стаціонарності. В універсальному Крайгінгу враховують умови, що два перших моменти змінної $Z(x)$ не стаціонарні:

$$\begin{aligned} E\{Z(x)\} &= m(x); \\ \text{cov}\{Z(x), Z(x+h)\} &= C(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (27)$$

Завданням апроксимації і в цьому випадку є знайти оцінку $Z(x_k)$, яка була б незміщеною і мала мінімальну дисперсію.

Запишемо математичне сподівання у вигляді полінома (7), тоді вагові коефіцієнти W_i знаходять із розв'язання системи, яка містить $n+m+1$ рівнянь та ідентична системі (19):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n W_j \gamma_{ij} + \sum_{l=0}^m a_l f^l(x_i, y_i) &= \gamma_{kj}, \\ \sum_{i=1}^n W_i f^l(x_i, y_i) &= f^l(x_k, y_k), \quad l=0,1,\dots,m. \end{aligned} \quad (28)$$

У формулах $f^l(x_i, y_i)$ – члени полінома.

Звичайно для врахування тренду використовують поліноми вигляду

$$\begin{aligned} Ax_l &= a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy, \\ Ax_{ll} &= a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2 + a_5 xy. \end{aligned} \quad (29)$$

Рівняння універсального Крайгінга з урахуванням Ax_{ll} в деталізованому вигляді запишемо

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n W_j \gamma_{ij} + a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 x_i^2 + a_4 y_i^2 + a_5 x_i y_i &= \gamma_{kj}, \\ \sum_{i=1}^n W_i &= 1, & \sum_{i=1}^n W_i x_i^2 &= x_k^2, \\ \sum_{i=1}^n W_i x_i &= x_k, & \sum_{i=1}^n W_i y_i^2 &= y_k^2, \\ \sum_{i=1}^n W_i y_i &= y_k, & \sum_{i=1}^n W_i x_i y_i &= x_k y_k. \end{aligned} \quad (30)$$

Запишемо систему (30) у матричній формі. Отримаємо

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} & 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1 y_1 \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} & 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & y_2^2 & x_2 y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} & 1 & x_n & y_n & x_n^2 & y_n^2 & x_n y_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1^2 & y_2^2 & \dots & y_n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_n y_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \dots \\ W_n \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{k1} \\ \gamma_{k2} \\ \dots \\ \gamma_{kn} \\ 1 \\ x_k \\ y_k \\ x_k^2 \\ y_k^2 \\ x_k y_k \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Із розв'язання (31) отримують значення вагових коефіцієнтів W_i та коефіцієнтів полінома a_i .

Визначення значення відмітки Z_k можна отримати інакше. Із розгляду системи (19) випливає, що для заданої кількості точок вагові коефіцієнти W_i залежать від n значень

коваріаційної функції і від функцій, які виражають тренд, тому оцінку $\hat{Z}_k$ можна представити у вигляді

$$\hat{Z}_k = \sum_{i=1}^n b_i C(h_{ik}) + a_0 + a_1 x_k + a_2 y_k + a_3 x_k^2 + a_4 y_k^2 + a_5 x_k y_k. \quad (32)$$

Коефіцієнти b_i ($i = 1, 2, \dots, n$), a_l ($l = 0, 1, \dots, m$) отримують із розв'язання системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n b_i C(h_{ij}) + a_0 + a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 x_i^2 + a_4 y_i^2 + a_5 x_i y_i &= Z_i \\ \sum_{i=1}^n b_i &= 0, & \sum_{i=1}^n b_i x_i^2 &= 0, \\ \sum_{i=1}^n b_i x_i &= 0, & \sum_{i=1}^n b_i y_i^2 &= 0, \\ \sum_{i=1}^n b_i y_i &= 0, & \sum_{i=1}^n b_i x_i y_i &= 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Система (33) містить також $n+m+1$ рівнянь з $n+m+1$ невідомими. Елементи матриці $C(h_{ij})$ можна виразити через коваріації точок поля або через аналітичні радіальні функції, найуживанішими серед яких є мультікватрики, диференційні сплайни [2, 3, 10]. Дисперсію визначуваних точок у цьому випадку запишемо:

$$\sigma_{Z_k}^2 = \text{var}[Z(x_k) - \hat{Z}(x_k)] = C_k - \sum_{l=0}^m a_l f^l(x_k, y_k) - \sum_{i=1}^n b_i C(h_{ik}), \quad (34)$$

де $\sum_{l=0}^m a_l f^l(x, y)$ – функція, яка характеризує тренд; C_k – дисперсія поля.

Отже, розглянуті залежності визначення відміток точок цифрової моделі рельєфу на основі колокації представляють узагальнену математичну модель, яка дозволяє врахувати при створенні ЦМР систематичну складову, корельовану змінну та некорельовану змінну. Проблема колокаційної моделі залишаються:

- 1) вибір розмірів локальних ділянок або радіуса пошуку, в межах якого буде проводитися апроксимація, як і вибір кількості та розташування вихідних точок;
- 2) вибір функції, якою апроксимують систематичну складову;
- 3) знаходження коваріаційної функції в колокаційній моделі або варіограми в Крайгін-гу, за якими визначають корельовану змінну;
- 4) підбір аналітичної функції, яка відповідає властивостям коваріаційної функції;
- 5) отримання коваріаційної матриці для некорельованої змінної.

1. Аронов В.И. Методы построения карт геолого-геофизических признаков и геометризация залежей нефти и газа на ЭВМ. – М.: Недра, 1990. – 301 с. 2. Буришинська Х.В. Порівняльний аналіз побудови цифрових моделей рельєфу з використанням апроксимаційних функцій // Міжвид. наук.-техн. зб.: Геодезія, картографія і аерофотознімання. – 2001. – Вип. 61. – С. 137 – 148. 3. Буришинська Х.В., Заяць О.С. Дослідження точності побудови цифрових моделей рельєфу на основі картометричних даних // Вісник геодезії і картографії. – 2002. – № 2. – С. 26 – 32. 4. Давид М. Геоestatистические методы при оценке запасов руд. – Пер. с англ. – Л.: Недра, 1980. – 360 с. 5. Девис Дж. Статистика и анализ геологических данных. – Пер. с англ. – М.: Недра, 1977. – 571 с. 6. Мазмишвили А.И. Способ наименьших квадратов. – М.: Недра, 1968. – 437 с. 7. Мориц Г. Современная физическая

- геодезия. – Пер. с англ. – М.: Недра, 1983. – 392 с. 8. Хромченко А.И. Кривая пересеченности и корреляционная функция рельефа // Рельеф земли и математика. – М.: Мысль, 1967. – С. 50 – 71. 9. Щеглов В.И. Практические методы Крайгинга. – М., 1989. – 51 с. 10. Watson G.S. Smoothing and interpolation by kriging and with splines // J. Mathematical Geology. – 1984. – № 6. – P. 601 – 615.