УДК 528.42:551.242

Л.М. Журавчак, Ю.О. Федоришин

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ УСТАЛЕНИХ КОЛИВАНЬ ЕМП В ТРИВИМІРНОМУ ОБ'ЄКТІ З КРИВОЛІНІЙНОЮ МЕЖЕЮ З УРАХУВАННЯМ СТРУМІВ ЗМІЩЕННЯ

Побудовано математичну модель усталених коливань ЕМП у просторовому об'єкті еліптичної форми, на межі якого задано умови першого роду. Для визначення розподілу компонент ЕМП запропоновано чисельно-аналітичний підхід, що базується на непрямому методі граничних елементів (НМГЕ), та проведено низку числових експериментів для обгрунтування його ефективності.

Ключові слова: усталені коливання ЕМП; непрямий метод граничних елементів; система рівнянь Гельмгольца.

Записано рівняння Максвела для однорідного тіла, в якому діють сторонні струми:

$$rot\bar{H}(x,\tau)=\sigma\bar{E}(x,\tau)+\varepsilon\frac{\partial\bar{E}(x,\tau)}{\partial\tau}+\bar{\psi}(x,\tau), \quad (1)$$

$$div\bar{H}(x,\tau)=0,\ rot\bar{E}(x,\tau)=-\mu\frac{\partial\bar{H}(x,\tau)}{\partial\tau},$$

$$div\bar{E}(x,\tau)=0,$$

де $\bar{H}(x,\tau)$ – вектор напруженості магнітного поля (МП) в Ω, $\bar{E}(x,\tau)$ – вектор напруженості електричного поля (ЕП) в Ω, σ – електропровідність середовища, μ – магнітна проникність, ε – діелектрична проникність, τ – часова змінна $x=(x_1,x_2,x_3)$ – просторова змінна, Ω – область, яку займає тіло.

Перетворивши рівняння (1) з метою виділення окремих рівнянь для електричного і магнітного полів, отримано для визначення невідомих компонент вектора напруженості ЕП $E_j(x,\tau)$ (j=1,2,3) початково-крайову задачу, яка складається системи телеграфних рівнянь:

$$\Delta E_j(x,\tau)-\sigma\mu\frac{\partial E_j(x,\tau)}{\partial\tau}-\varepsilon\mu\frac{\partial E_j(x,\tau)}{\partial\tau^2}=\mu\frac{\partial\psi_j(x,\tau)}{\partial\tau}, \quad (2)$$

граничних:

$$E_j(x,\tau)=0,\ (x,\tau)\in\Gamma\times T, \quad (3)$$

та початкових умов:

$$E_j(x,0)=0,\ \frac{\partial E_j(x,0)}{\partial\tau}=0,\ x\in\Omega, \quad (4)$$

де Δ – оператор Лапласа, $T=\{\tau{:}0<\tau<\infty\}$, Γ – межа області Ω.

У допущенні, що фізичні величини гармонічно змінюються в часі з кутовою частотою ω:

$$E_j(x,\tau)=\widetilde{E}_j(x,\omega)e^{-i\omega\tau},\ \psi_j(x,\tau)=\widetilde{\psi}_j(x,\omega)e^{-i\omega\tau},$$

аналіз сильно спрощується, оскільки часова змінна виключається з диференційних рівнянь і умов, внаслідок цього зникають початкові умови і замість задачі (2)-(4) одержано крайову задачу:

$$\Delta\tilde{E}_j(x,\omega)+\mu\omega(\varepsilon\omega+i\sigma)\tilde{E}_j(x,\omega)=-i\omega\mu\tilde{\psi}_j(x,\omega),$$
$$x\in\Omega, \quad (5)$$

$$\tilde{E}_j(x,\omega)=0,\ x\in\Gamma, \quad (6)$$

де $\tilde{E}_j(x,\omega)=\tilde{E}_j^{(1)}(x,\omega)+i\tilde{E}_j^{(2)}(x,\omega)$, $\tilde{\psi}_j(x,\omega)=\tilde{\psi}_j^{(1)}(x,\omega)+i\tilde{\psi}_j^{(2)}(x,\omega)$ – комплексні амплітуди компонент вектора напруженості ЕП та сторонніх джерел струму.

Для знаходження розв'язків задачі (5)-(6) використано непрямий метод граничних елементів [Бенерджи и др., 1984]. На граничній поверхні Γ введено граничні елементи Γ_ν з невідомими компонентами фіктивних джерел струму $\widetilde{\varphi}_{j\nu}(x,\omega)=\widetilde{\varphi}_{j\nu}^{(1)}+i\widetilde{\varphi}_{j\nu}^{(2)}$.

Тоді замість рівнянь (5) записано:

$$\Delta\tilde{E}_j(x,\omega)+\mu\omega(\varepsilon\omega+i\sigma)\tilde{E}_j(x,\omega)=$$
$$-\sum_{\nu=1}^{V}\tilde{\varphi}_{j\nu}\chi_\nu-i\omega\mu\tilde{\psi}_j(x,\omega), \quad (7)$$

де χ_ν – характеристична функція елемента Γ_ν.

Використавши фундаментальний розв'язок $\widetilde{\Phi}(x,\xi,\omega)$ рівняння Гельмгольца для простору, записано інтегральне зображення розв'язку задачі (7), (6) для компонент $\widetilde{E}_i(x,\omega)$:

$$\tilde{E}_j(x,\omega)=\sum_{\nu=1}^{V}\int_{\Gamma_\nu}\tilde{\Phi}(x,\xi,\omega)\tilde{\varphi}_{j\nu}(\xi,\omega)d\Gamma_\nu(\xi)+$$
$$+\tilde{I}_{cj}(x,\omega,\tilde{\Phi}), \quad (8)$$

а також одержані на його основі інтегральні зображення для похідних від цих компонент за координатами:

$$\frac{\partial\widetilde{E}_j(x,\omega)}{\partial x_l}=\sum_{\nu=1}^{V}\int_{\Gamma_\nu}\widetilde{Q}_l(x,\xi,\omega)\widetilde{\varphi}_{j\nu}(\xi,\omega)d\Gamma_\nu+$$
$$+\widetilde{I}_{cj}(x,\omega,\widetilde{Q}_l), \quad (9)$$

де $\widetilde{\Phi}(x,\xi,\omega)$ та $\widetilde{Q}_l(x,\xi,\omega)$ – ядра операторів.

Невідомі дійсні функції (фіктивні джерела струму) $\widetilde{\varphi}_{iv}^{(1)}(x,\omega)$, $\widetilde{\varphi}_{iv}^{(2)}(x,\omega)$ апроксимовано константами $d_{iv}^{(1)}, d_{iv}^{(2)}$. Для знаходження цих констант побудовано з використанням виразів (8), (9) систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР), вимагаючи задоволення в колокаційному сенсі граничних умов [Журавчак та ін., 2005]:

$$\sum_{v=1}^{V}[d_{jv}^{(1)} I_{vw}^{(1)}(\widetilde{\Phi}^{(1)}) - d_{jv}^{(2)} I_{vw}^{(1)}(\widetilde{\Phi}^{(2)})] =$$

$$= -\widetilde{I}_{cj}^{(1)}(x^w, \omega, \widetilde{\Phi}^{(1)}), \ w = 1,\ldots,V, \ x^w \in \Gamma_w, \quad (10)$$

$$\sum_{v=1}^{V}[d_{jv}^{(1)} I_{vw}^{(1)}(\tilde{\Phi}^{(2)}) + d_{jv}^{(2)} I_{vw}^{(1)}(\tilde{\Phi}^{(1)})] =$$

$$= -\widetilde{I}_{cj}^{(2)}(x^w, \omega, \widetilde{\Phi}^{(1)}), \quad (11)$$

де $I_{vw}(F) = \int_{\Gamma_v} F(x^w, \xi, \omega)\, d\Gamma_v(\xi)$.

Розв'язавши СЛАР (10), (11), одержано формули для знаходження дійсних $\tilde{E}_j^{(1)}(x,\omega)$ і уявних частин $\tilde{E}_j^{(2)}(x,\omega)$ компонент вектора напруженості ЕП у будь-яких точках тіла x^p, які нас цікавлять, включаючи і граничну поверхню.

Дійсні й уявні частини $\widetilde{H}_k^{(1)}(x,\omega)$, $\widetilde{H}_k^{(2)}(x,\omega)$ компонент вектора напруженості МП обчислено за формулами:

$$\widetilde{H}_k^{(1)}(x,\omega) = \frac{1}{\omega\mu}\left(\frac{\partial \widetilde{E}_l^{(2)}(x,\omega)}{\partial x_j} - \frac{\partial \widetilde{E}_j^{(2)}(x,\omega)}{\partial x_l}\right),$$

$$\widetilde{H}_k^{(2)}(x,\omega) = -\frac{1}{\omega\mu}\left(\frac{\partial \widetilde{E}_l^{(1)}(x,\omega)}{\partial x_j} - \frac{\partial \widetilde{E}_j^{(1)}(x,\omega)}{\partial x_l}\right)$$

Проведені числові дослідження показали ефективність використання НМГЕ для дослідження електромагнітних коливань в об'єктах з криволінійною межею.

Література

Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.

Журавчак Л. М., Шуміліна Н. В. Математичне тривимірне моделювання усталених коливань у кусково-однорідному півпросторі // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ, 2005. – № 2. – С. 14–20.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ ЭМП В ТРЕХМЕРНОМ ОБЪЕКТЕ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ С УЧЕТОМ ТОКОВ СМЕЩЕНИЯ

Л.М. Журавчак, Ю.А. Федоришин

Построено математическую модель установившихся колебаний ЕМП в пространственном объекте эллиптической формы, на границе которого задано условия первого рода. Для нахождения распределения компонент ЕМП построено численно-аналитический подход, базирующийся на непрямом методе граничных элементов, и проведено ряд численных экспериментов для доказательства его эффективности.

Ключевые слова: установившиеся колебания ЕМП; непрямой метод граничных элементов; система уравнений Гельмгольца.

MATHEMATICAL MODELING OF STEADY OSCILLATIONS OF ELECTROMAGNETIC FIELD IN THE THREE-DIMENSIONAL OBJECT WITH A CURVILINEAR BOUNDARY BASED DISPLACEMENT CURRENTS.

L. Zhuravchak, Y. Fedoryshyn

The mathematical model for steady oscillations of electromagnetic field in the three-dimensional object is built. For calculating of the distribution of the electromagnetic field the numerical algorithm based on the boundary element method is developed. Numerical experiments are performed.

Key words: steady oscillations of electromagnetic field; boundary element method.

Карпатське відділення Інституту геофізики