УДК 528. 21/22

КОВАРІАЦІЙНІ ФУНКЦІЇ ДЛЯ СКЛАДОВИХ ВІДХИЛЕНЬ ВИСКА

© Фоца Р.С., 1999
ДУ "Львівська політехніка"

Получены выражения для ковариационных функций составляющих уклонений отвеса на основании потенциалов нецентральных радиальных мультиполей.

The covariation functions of the deflection of vertical was obtained by means non-central radial multipole potential.

Для апроксимації гравітаційного потенціалу Землі в регіональному масштабі найбільше використання отримали коваріаційні функції, які застосовуються у методі колокації. В [1,2] доводиться можливість використання у методі середньої квадратичної колокації потенціалів нецентральних радіальних мультиполів як коваріаційних функцій збурюючого потенціалу T. Нижче, на основі потенціалів нецентральних радіальних мультиполів, отримаємо вирази для коваріаційних функцій складових відхилень виска.

Складові гравіметричного відхилення виска ξ,η пов'язані із збурюючим потенціалом T відомими співвідношеннями [5]:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{\gamma_0 r}\frac{\partial T}{\partial \vartheta};\\ \eta &= -\frac{1}{\gamma_0 r\sin\vartheta}\frac{\partial T}{\partial \lambda}. \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

де r,ϑ,λ – сферичні координати, γ_0 – середнє значення сили тяжіння.

Оскільки ξ і η є лінійними функціоналами збурюючого потенціалу T, то для знаходження необхідних коваріацій можемо використати правило перетворення коваріацій [5]:

$$C_{ij} = L_i^p L_j^p K(P,Q)\,, \tag{2}$$

де C_{ij} – коваріація $\operatorname{cov}\left[l_i,l_j\right]$; L_i^p, L_j^p – лінійні функціонали; $K(P,Q)$ – коваріаційна функція збурюючого потенціалу T.

В [1] наведено вираз для потенціалу радіального нецентрального мультиполя:

$$V_n(P,Q) = V_n^i(P)\left(\frac{R_B^2}{r_P r_Q}\right)^{n+1}, \tag{3}$$

де R_B – радіус сфери Бьєрхаммера, а зміст решти елементів виразу (3) зрозумілий з рис. 1.

$V_n^i(P)$ можна вирахувати за допомогою рекурентної формули, наведеної в [1]:

$$nq_i^2V_n^i(P) = (2n-1)(t-s_i)V_{n-1}^i(P) - (n-1)V_{n-2}^i(P). \tag{4}$$

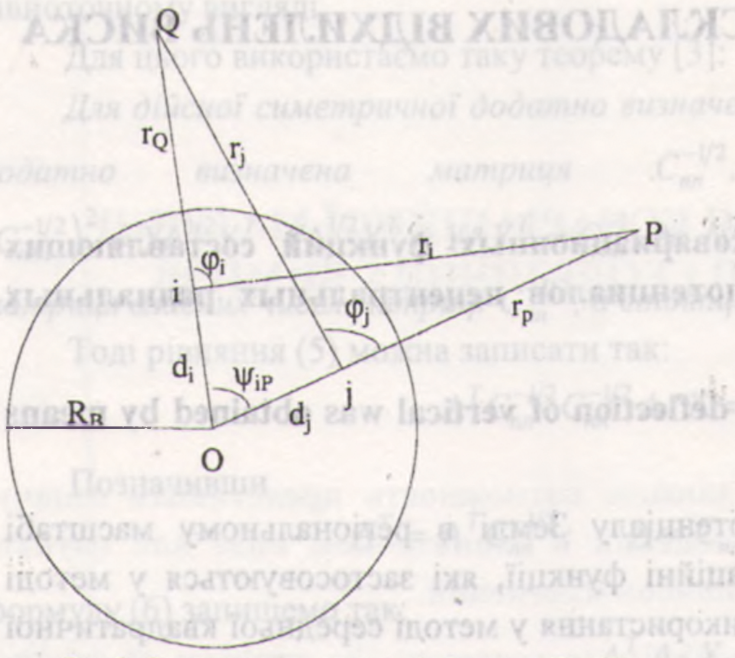

Рис.1. До пояснення елементів формул (3)–(5)

У цій формулі

$$
\left.
\begin{aligned}
&t=\cos\psi_{iP}\,,\\
&q_i=\sqrt{1+s_i^2-2s_it}\,,\\
&s_i=\frac{d_i}{r_P}\,,
\end{aligned}
\right|
\qquad (5)
$$

а для розрахунку за рекурентною формулою (4) маємо вирази для мультиполів нульового і першого порядків:

$$
\left.
\begin{aligned}
&V_0^i(P)=\frac{1}{q_i}\,,\\
&V_1^i(P)=\left(t-s_i\right)\frac{1}{q_i^{\,3}}
\end{aligned}
\right|
\qquad (6)
$$

Застосувавши тепер формулу перетворення коваріацій до виразів (1) і використавши при цьому як $K(P,Q)$ радіальні нецентральні мультиполя $V_n(P,Q)$ (можливість цього, як вже було сказано вище, доведена в [1,2]), отримаємо такі вирази для коваріацій n-го порядку між складовими відхилень виска:

$$
\left.
\begin{aligned}
&cov_n\left[\xi_P,\xi_Q\right]=\frac{1}{\gamma_0^2}\frac{1}{r_Pr_Q}\frac{\partial^2V_n(P,Q)}{\partial\vartheta_P\partial\vartheta_Q}\,;\\
&cov_n\left[\eta_P,\eta_Q\right]=\frac{1}{\gamma_0^2}\frac{1}{r_Pr_Q\sin\vartheta_P\sin\vartheta_Q}\frac{\partial^2V_n(P,Q)}{\partial\lambda_P\partial\lambda_Q}\,;\\
&cov_n\left[\xi_P,\eta_Q\right]=-\frac{1}{\gamma_0^2}\frac{1}{r_Pr_Q\sin\vartheta_Q}\frac{\partial^2V_n(P,Q)}{\partial\vartheta_P\partial\lambda_Q}\,;\\
&cov_n\left[\eta_P,\xi_Q\right]=-\frac{1}{\gamma_0^2}\frac{1}{r_Pr_Q\sin\vartheta_P}\frac{\partial^2V_n(P,Q)}{\partial\lambda_P\partial\vartheta_Q}
\end{aligned}
\right|
\qquad (7)
$$

Функція $V_n(P,Q)$ – функція точок $P(r_P,\vartheta_P,\lambda_P)$ та $Q(r_Q,\vartheta_Q,\lambda_Q)$ і вона явно залежить від радіальних координат r_P та r_Q, але неявно від кутових координат (ϑ_P,λ_P) та (ϑ_Q,λ_Q). Неявна залежність від кутових координат виражається через ψ_{PQ} формулою

$$\cos\psi_{PQ}=\cos\vartheta_P\cos\vartheta_Q+\sin\vartheta_P\sin\vartheta_Q\cos(\lambda_Q-\lambda_P)=t\,. \qquad (8)$$

Отже,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V_n(P,Q)}{\partial\vartheta_P\partial\vartheta_Q} &= \frac{\partial^2 V_n(P,Q)}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial\vartheta_Q}\frac{\partial t}{\partial\vartheta_P} + \frac{\partial V_n(P,Q)}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial\vartheta_P\vartheta_Q};\\
\frac{\partial^2 V_n(P,Q)}{\partial\lambda_P\partial\lambda_Q} &= \frac{\partial^2 V_n(P,Q)}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial\lambda_Q}\frac{\partial t}{\partial\lambda_P} + \frac{\partial V_n(P,Q)}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial\lambda_P\lambda_Q};\\
\frac{\partial^2 V_n(P,Q)}{\partial\vartheta_P\partial\lambda_Q} &= \frac{\partial^2 V_n(P,Q)}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial\lambda_Q}\frac{\partial t}{\partial\vartheta_P} + \frac{\partial V_n(P,Q)}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial\vartheta_P\lambda_Q}.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Продиференціювавши (8) по t, отримаємо:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial t}{\partial\vartheta_P} &= -\sin\vartheta_P\cos\vartheta_Q + \cos\vartheta_P\sin\vartheta_Q\cos(\lambda_Q-\lambda_P),\\
\frac{\partial t}{\partial\lambda_P} &= \sin\vartheta_P\sin\vartheta_Q\sin(\lambda_Q-\lambda_P),\\
\frac{\partial t}{\partial\vartheta_Q} &= -\cos\vartheta_P\sin\vartheta_Q + \sin\vartheta_P\cos\vartheta_Q\cos(\lambda_Q-\lambda_P),\\
\frac{\partial t}{\partial\lambda_Q} &= -\sin\vartheta_P\sin\vartheta_Q\sin(\lambda_Q-\lambda_P)
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Отримаємо також необхідні інші похідні:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 t}{\partial\vartheta_P\partial\vartheta_Q} &= \sin\vartheta_P\sin\vartheta_Q + \cos\vartheta_P\cos\vartheta_Q\cos(\lambda_Q-\lambda_P),\\
\frac{\partial^2 t}{\partial\lambda_P\lambda_Q} &= \sin\vartheta_P\sin\vartheta_Q\cos(\lambda_Q-\lambda_P),\\
\frac{\partial^2 t}{\partial\vartheta_P\lambda_Q} &= -\cos\vartheta_P\sin\vartheta_Q\sin(\lambda_Q-\lambda_P)
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Продиференціювавши тепер формулу (3) по t, отримаємо:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial V_n(P,Q)}{\partial t} &= \frac{\partial V_n^i(P)}{\partial t}\left(\frac{R_b^2}{r_P r_Q}\right)^{n+1},\\
\frac{\partial^2 V_n(P,Q)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 V_n^i(P)}{\partial t^2}\left(\frac{R_b^2}{r_P r_Q}\right)^{n+1}.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Тепер з врахуванням формул (9) і (12) вирази (7) можемо записати у такому вигляді:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{cov}_n\left[\xi_P,\xi_Q\right] &= \frac{1}{\gamma_0^2}\frac{1}{r_P r_Q}\left(\frac{R_B^2}{r_P r_Q}\right)^{n+1}\times\\
&\times\left[\frac{\partial^2 V_n^i(P)}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial\vartheta_Q}\frac{\partial t}{\partial\vartheta_P}+\frac{\partial V_n^i(P)}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial\vartheta_P\partial\vartheta_Q}\right],\\
\operatorname{cov}_n\left[\eta_P,\eta_Q\right] &= \frac{1}{\gamma_0^2}\frac{1}{r_P r_Q\sin\vartheta_P\sin\vartheta_Q}\left(\frac{R_B^2}{r_P r_Q}\right)^{n+1}\times\\
&\times\left[\frac{\partial^2 V_n^i(P)}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial\lambda_Q}\frac{\partial t}{\partial\lambda_P}+\frac{\partial V_n^i(P)}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial\lambda_P\partial\lambda_Q}\right]\\
\operatorname{cov}_n\left[\xi_P,\eta_Q\right] &= -\frac{1}{\gamma_0^2}\frac{1}{r_P r_Q\sin\vartheta_Q}\left(\frac{R_B^2}{r_P r_Q}\right)^{n+1}\times\\
&\times\left[\frac{\partial^2 V_n^i(P)}{\partial t^2}\frac{\partial t}{\partial\lambda_Q}\frac{\partial t}{\partial\vartheta_P}+\frac{\partial V_n^i(P)}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial\vartheta_P\partial\lambda_Q}\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Як бачимо, щоб за допомогою формул (13) обчислювати необхідні коваріації, нам необхідно отримати вирази для обчислення $\frac{\partial V_n^i(P)}{\partial t}$ і $\frac{\partial^2 V_n^i(P)}{\partial t^2}$. Для цього продиференціюємо формулу (4) по t. В результаті цього після перетворень отримаємо рекурентну формулу для обчислення $\frac{\partial V_n^i(P)}{\partial t}$:

$$\left.\begin{aligned}
nq_i^2\,\frac{\partial V_n^i(P)}{\partial t} &= 2ns_i V_n^i(P)+(2n-1)V_{n-1}^i(P)+\\
&+(2n-1)(t-s_i)\frac{\partial V_{n-1}^i(P)}{\partial t}-(n-1)\frac{\partial V_{n-2}^i(P)}{\partial t}.
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Для обчислень за цією формулою необхідно мати ще вирази для $\frac{\partial V_0^i(P)}{\partial t}$ і $\frac{\partial V_1^i(P)}{\partial t}$. Знайдемо їх, продиференціювавши вирази (6) по t. Отримаємо:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial V_0^i(P)}{\partial t} &= \frac{s_i}{q_i^3},\\
\frac{\partial V_1^i(P)}{\partial t} &= \frac{1}{q_i^3}+(t-s_i)\frac{3s_i}{q_i^5}.
\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Продиференціювавши тепер формулу (14) і вирази (15) по t отримаємо рекурентну формулу для обчислення $\frac{\partial^2 V_n^i(P)}{\partial t^2}$ і вирази для інших похідних мультиполя нульового і першого порядку:

$$\left.\begin{aligned} nq^2 \frac{\partial^2 V_n^i(P)}{\partial t^2} &= 4ns_i \frac{\partial V_n^i(P)}{\partial t} + (4n-2)\frac{\partial V_{n-1}^i(P)}{\partial t} + \\ &+ (2n-1)(t-s_i)\frac{\partial^2 V_{n-1}^i(P)}{\partial t^2} - (n-1)\frac{\partial^2 V_{n-2}^i(P)}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 V_0^i(P)}{\partial t^2} &= \frac{3s_i^2}{q_i^5}, \\ \frac{\partial^2 V_1^i(P)}{\partial t^2} &= \frac{6s_i}{q_i^5} + (t-s_i)\frac{15s_i^2}{q_i^7}. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Отже, тепер вирази (10),(11),(4)–(6),(14)–(16) дають змогу обчислювати усі необхідні величини для обчислення за формулами (13) коваріацій між складовими відхилень виска з використанням як $K(P,Q)$ нецентральних радіальних мультиполів $V_n^i(P)$.

Необхідно відзначити, що взаємні коваріаційні функції пов'язані з компонентами відхилень виска залежать не лише від відстані між точками P і Q, але і від напрямку вектора $\overline{PQ}$. Саме тому Г. Моріц ввів [4] поздовжні l і поперечні m компоненти відхилень виска (рис. 2) як проекцію на напрямок великого кола (l), що проходить через точки P і Q та перпендикулярний йому напрямок (m).

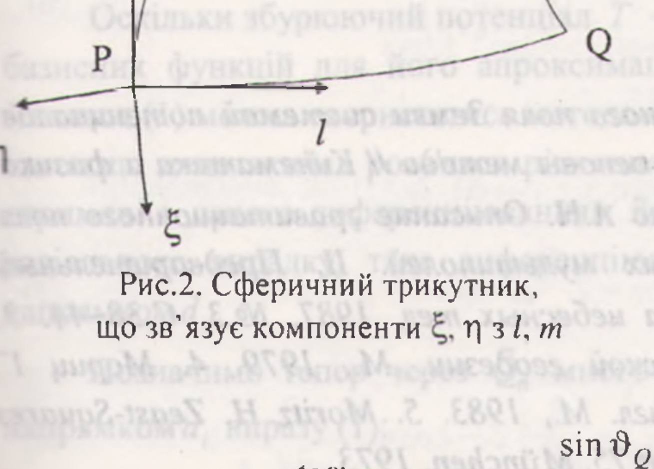

Рис.2. Сферичний трикутник, що зв'язує компоненти ξ, η з l, m

З визначення випливає, що у точці P

$$\left.\begin{aligned} l &= -\xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha, \\ m &= -\xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

звідки

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -l\cos\alpha - m\sin\alpha, \\ \eta &= -l\sin\alpha + m\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

де α – азимут напрямку PQ у точці P, який можна знайти за формулою

$$tg\alpha = \frac{\sin\vartheta_Q \sin(\lambda_Q - \lambda_P)}{\sin\vartheta_P \cos\vartheta_Q - \cos\vartheta_P \sin\vartheta_Q \cos(\lambda_Q - \lambda_P)}. \qquad (19)$$

Взаємні коваріаційні функції пов'язані з допоміжними компонентами l і m вигідно відрізняються від коваріаційних функцій, пов'язаних з ξ і η, оскільки залежать тільки від сферичної відстані ψ між точками P і Q.

Для обчислення коваріаційних функцій, пов'язаних з допоміжними компонентами l і m, використаємо теорему 11.9, доведену в [3]:

Нехай L_1 і L_2 – оператори в гільбертовому просторі H, яким відповідають взаємні спряжені функції $\Lambda_1(A,B)$ і $\Lambda_2(A,B)$, відповідно. Тоді операторам L_1+L_2 відповідає спряжена функція $\Lambda_1+\Lambda_2$; αL_1 – спряжена функція $\alpha\Lambda_1$; L_1L_2 – спряжена функція $\Lambda_{1,2}(A,B)=L_{1A}L_{2B}Я(A,B)=(\Lambda_1(A,\bullet),\Lambda_2(\bullet,B))$, де $Я(A,B)$ – ядро, що відтворює гільбертовий простір H.

Застосувавши цю теорему і вирази (17), отримаємо формули для обчислення коваріаційних функцій, пов'язаних з допоміжними компонентами l і m з використанням коваріаційних функцій, пов'язаних з ξ і η:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{cov}_n[l_P,l_Q]&=\operatorname{cov}_n\left[\xi_P,\xi_Q\right]\cos\alpha\cos\alpha'+\operatorname{cov}_n\left[\xi_P,\eta_Q\right]\cos\alpha\sin\alpha'+\\
&\quad+\operatorname{cov}_n\left[\eta_P,\xi_Q\right]\sin\alpha\cos\alpha'+\operatorname{cov}_n\left[\eta_P,\eta_Q\right]\sin\alpha\sin\alpha',\\
\operatorname{cov}_n[m_P,m_Q]&=\operatorname{cov}_n\left[\xi_P,\xi_Q\right]\sin\alpha\sin\alpha'-\operatorname{cov}_n\left[\xi_P,\eta_Q\right]\sin\alpha\cos\alpha'-\\
&\quad-\operatorname{cov}_n\left[\eta_P,\xi_Q\right]\cos\alpha\sin\alpha'+\operatorname{cov}_n\left[\eta_P,\eta_Q\right]\cos\alpha\cos\alpha',\\
\operatorname{cov}_n[l_P,m_Q]&=\operatorname{cov}_n\left[\xi_P,\xi_Q\right]\cos\alpha\sin\alpha'-\operatorname{cov}_n\left[\xi_P,\eta_Q\right]\cos\alpha\cos\alpha'+\\
&\quad+\operatorname{cov}_n\left[\eta_P,\xi_Q\right]\sin\alpha\sin\alpha'-\operatorname{cov}_n\left[\eta_P,\eta_Q\right]\sin\alpha\cos\alpha',\\
\operatorname{cov}_n[m_P,l_Q]&=\operatorname{cov}_n\left[\xi_P,\xi_Q\right]\sin\alpha\cos\alpha'+\operatorname{cov}_n\left[\xi_P,\eta_Q\right]\sin\alpha\sin\alpha'-\\
&\quad-\operatorname{cov}_n\left[\eta_P,\xi_Q\right]\cos\alpha\cos\alpha'-\operatorname{cov}_n\left[\eta_P,\eta_Q\right]\cos\alpha\sin\alpha'.
\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

У цих формулах α' – азимут напрямку PQ у точці Q.

Отже, отримані коваріаційні функції для складових відхилень виска можуть бути використані для апроксимації гравітаційного потенціалу Землі системою нецентральних радіальних мультиполів.

1. Марченко А.Н. Описание гравитационного поля Земли системой потенциалов нецентральных мультиполей. I. Теоретические основы метода // Кинематика и физика небесных тел. 1987. №2. С.54–62. 2. Марченко А.Н. Описание гравитационного поля Земли системой потенциалов нецентральных мультиполей. II. Предварительный мультипольний анализ // Кинематика и физика небесных тел. 1987. № 3. С.38–44. 3. Нейман Ю.М. Вариационний метод физической геодезии. М., 1979. 4. Мориц Г. Современная физическая геодезия / Пер. с англ. М., 1983. 5. Moritz H. Zeast-Squares Collocation. Deutsche Geod. Komiss., Reihe A, Heft 75, München, 1973.